华夏英才基金学术文库

点可数覆盖与序列覆盖映射

林　　寿　著

内容简介

本书以点可数覆盖为线索，利用映射的一般方法对用覆盖或网络来定义的许多广义度量空间类进行了系统的研究，是作者及其合作者关于一般拓扑学的一部专著．内容包括点可数覆盖，点有限覆盖列，遗传闭包保持覆盖与星可数覆盖等．

本书论述严谨，自成系统，只要具有一般拓扑学的基础知识就能阅读本书，并进入研究的前沿．

读者对象为大专院校数学系师生、研究生和数学工作者．

A Foreword

The notions of metrizability and compactness are at the center of general topology. This is so from historical point of view: general topology developed around these notions. This is also so if we look at the structure of general topology today. Compactness is defined in terms of open coverings. It turned out, after the classic work of P. S. Alexandroff, P. S. Urysohn, F. B. Jones, A. H. Stone, R. H. Bing, J. Nagata, and Ju. M. Smirnov, that metrizability can be also characterized in terms of sequences of open coverings. Nowadays it is widely recognized that the method of systems of coverings is one of the maim tools for classifying spaces. Many most important classes of spaces were introduced using natural covering structures which find their origins in metrizable spaces. In fifties and sixties it was discovered that systems of coverings can be used very effectively to construct some natural mappings of metrizable spaces onto spaces admitting such systems of coverings (K. Nagami, V. I. Ponomarev, A. Okuyama, A. Arhangel'skii). This method led to mutual classification of spaces and mappings based on the interaction of systems of coverings and mappings(see [Arhangel'skii, 1966]).

This monograph contains a systematic study of classes of generalized metric spaces on the basis

of coverings and networks, in combination with the general method of mappings. It presents the modern state of the mutual classification of spaces and mappings, one of central domains of general topology. The author, professor Shou Lin, and his collaborators and colleagues, first of all, from China(Chuan Liu, Pengfei Yan, Mumin Dai) and Japan(K. Nagami, Y. Tanaka, T. Hoshina), made major contributions to this theory with important, and often quite unexpected, results.

An important feature of the book is that it may serve as a systematic source of information on classification of classes of mappings and on methods used to construct mappings with special combinations of properties. This direction of research is not sufficiently well covered in the existing textbooks and this monograph will be especially valuable in this connection. However, the book will be very useful to all general topologists, even to those who are working on very different problems, and to graduate students in general topology with various interests. Indeed, the monograph provides an interesting and upto date introduction to metrizability and to classes of generalized metric spaces. It introduced basic classes of mappings, in particular, quotient mappings, compact covering mappings and to various generalizations of those. These notions are of very fundamental nature.

Another notion of fundamental nature, studied and applied systematically in the monograph, is the notion of network introduced in 1959. A family $\mathcal{S}$ of subsets of a topological space X is called a network of X if every open subset is the union of a subfamily of $\mathcal{S}$. The networks were used in [Arhangel'skii, 1959] to distinguish the spaces with a countable network. It was observed in [Arhangel'skii, 1959] that every continuous image of a separable metric space has a countable network, and it was also established in [Arhangel'skii, 1959] that every compact Hausdorff space with a countable network has a countable base(and is therefore metrizable). From these statements it follows that if a compact Hausdorff space Y is a continuous image of a separable metrizable space, then Y is metrizable. This theorem from [Arhangel'skii, 1959] is one of the first and typical results in the general theory of spaces and mappings the modern state of which is presented in this monograph. It turned out that networks are much more subtle, more flexible structures than bases, which are "too nice formations". It is through various, often ingenious, combinations of restrictions on networks that most important classes of generalized metric spaces are introduced and studied. One of such classes was defined by E. Michael, using the concept of k-network[Michael, 1966], which is really central in the monograph.

Though reading the monograph does no require much special background, the exposition in it goes far beyond the elementary level. It contains a rich collection of deep and beautiful results of highest professional level. Theorem 2.1.9, Corollary 2.1.11, and Theorems 2.2.5, 2.2.10, 2.3.11, 2.3.13 and Theorem 2.5.10 can serve as examples of such excellent results. In particular, these theorems provide sufficient conditions for a mapping to be compact covering and sufficient conditions for a space to be a quotient space of a metric space with separable fibres.

The book not only brings the reader to the very first line of investigations in the theory of generalized metric spaces, it contains many intriguing and important unsolved problems, some of them old and some new. Here is one of the open problems, a very natural one. Suppose Y is a quotient space of a metrizable space, with compact fibres. Suppose further that Y is regular. Is then every point in Y an intersection of a countable family of open sets? This book provides all background and information needed to start to work on this and similar problems. So the monograph will be equally interesting and useful for an expert and for a graduate student.

I would like to mention another joyful aspect of this monograph. Its appearance marks the success of a long period of development of general topology in China, it brings to the light important contributions to the mainstream of general topology made by a very creative group of Chinese mathematicians.

Congratulations to the author and to the readers with the book!

A. V. Arhangel'skii

前　言

空间与映射的理论是一般拓扑学的重要组成部分. 著作《广义度量空间与映射》(科学出版社, 林寿[1995])用映射方法系统论述了广义度量空间的基本理论, 总结了 20 世纪 60 年代至 90 年代初一般拓扑学的重要研究成果. 广义度量理论与覆盖性质理论中的许多问题涉及点可数覆盖的研究. 20 世纪 90 年代一般拓扑学的发展动力之一是专著《Open Problems in Topology》(North-Holland, van Mill, Reed[1990])中的问题, 其中的一些问题涉及具有点可数基空间与度量空间的紧覆盖映射, 引导了一批拓扑学名家对点可数覆盖及相关映射理论的兴趣, 促进了 k 网理论与度量空间映射理论的发展, 许多优秀的结果不断涌现. 因此, 总结这 10 年国际上广义度量空间

理论的成果，反映我国学者在该领域的贡献，引导更多的年青数学工作者投身于该领域的工作是十分迫切和非常必要的.

除一些熟知的点集拓扑学知识与引用《广义度量空间与映射》和集论拓扑学中的几个结果外，本书的证明基本上是封闭的，一些较为复杂的例子也给出了详细的构造. 特别地，无需假设读者已阅读过《广义度量空间与映射》. 本书由五章及 300 多篇文献组成. 第一章简要综述了 20 世纪 90 年代的广义度量空间理论，包含了它的主要研究课题、国内外学者的重要贡献，同时作为预备章也介绍了一些基本概念、相关的命题及例子. 第二章介绍了点可数覆盖与度量空间的 s 映射理论，用特殊的商空间刻画了具有点可数基的空间，建立了度量空间的商 s 映象与由 k 网、序列网、cs 网、sn 网和 cfp 网等集族确定的点可数集族之间的精确关系. 第三章介绍了点有限覆盖列与度量空间的 π 映射、紧映射理论，发展了点正则覆盖的方法，阐述了度量空间上序列覆盖映射与 1 序列覆盖映射的联系. 第四章介绍了遗传闭包保持覆盖、控制族与度量空间的闭映射理论，揭示了这些空间类的一些覆盖性质. 第五章介绍了星可数覆盖与局部可分度量空间的商映射理论，突出了具有星可数 k 网空间在研究局部可分度量空间映象中的地位，列举了点可数覆盖在探讨度量空间的闭映象和乘积空间的 k 空间性质中的作用.

受高国士教授十多年的教导，近年来作者在广义度量空间理论方面做过一些探索性的研究，尤其偏爱空间与映射方面的课题. 广义度量空间理论从 20 世纪 60 年代起在国际上蓬勃发展，各个不同时期均不断有名家与名作涌现，作者的工作受 A. Arhangel'skii, L. Foged, G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka 等的影响较大. 尽管本书与《广义度量空间与映射》同属于广义度量空间理论，作者无意写一本关于空间与映射方向的手册，仅试图把它作为《广义度量空间与映射》的姐妹篇，以点可数覆盖为线索，借助序列覆盖映射理论，反映 20 世纪 90 年代广义度量空间研究中引人入胜的一个侧面. 本书的大部分内容取材于作者的博士学位论文(林寿[2000a]，导师周友成教授)，同时包含了作者及国内外学者 1992 年以来的一些相关工作. 感谢高国士教授、刘应明教授(中科院院士)、林群研究员(中科院院士)、吴利生教授、蒋继光教授、戴牧民教授和周友成教授等前辈多年来一直给予作者的关心、指导与扶持，感谢与刘川教授、燕鹏飞教授、Y. Tanaka 教授、T. Mizokami 教授、彭良雪博士等进行富有成效的合作，感谢与恽自求教授、李进金教授、葛英副教授、李克典教授、夏省祥教授等进行有益的学术交流，感谢国家自然科学基金资助项目“点集拓扑(19476010)”、“函数空间的拓扑性质(19501023)”与“集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用”(19971048)，福建省自然科学基金资助项目“集论拓扑(A94019)”、“函数空间的拓扑性质”(A97025)与“集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用”(F00010)，福建省“百千万人才工

程”人选培养基金资助项目“广义度量空间研究”(1999)及宁德师范高等专科学校“学术带头人专项经费”等为研究工作提供的资金保证, 感谢 Y. Tanaka 教授、K. Tamano 教授、J. Nagata 教授、M. Sakai 教授、A. Shibakov 博士、Y. Yajima 教授、M. Choban 教授、H. Junnila 教授、刘川教授、高智民教授、恽自求教授、师维学博士等为研究工作提供的资料保证. 感谢宁德师范高等专科学校及刘卓雄校长等师专学人 20 年来一直对作者各方面的支持. 感谢福建师范大学及数学系对作者聘任为基础数学岗位特聘教授的重视及提供优良的工作和生活环境. 本书的出版应特别感谢刘应明教授、江守礼教授和王尚志教授的热情推荐, 著名拓扑学家A. B. Архангельский 教授的序及中共中央统战部华夏英才基金的支持.

作　者

2001 年 3 月 31 日于福建师范大学

目　录

第一章　绪论

拓扑学的中心课题是确定和研究拓扑不变量. Arhangel’skii(Arhangel’skii, Pontryagin[1990])指出: 一般拓扑学致力于拓扑空间及连续性的研究, 有三个主要的“内在”任务, 一是不同拓扑空间类的比较, 二是确定类的研究, 三是为上述目的及应用的需要定义出新的概念和空间类. 实现任务一的联结空间的映射的方法是特别地重要, 该方法是直接建立不同空间类之间的联系, 任务二主要涉及空间类关于运算的性质, 而覆盖的方法对完成上述任务起重要的作用.

由此可见, 映射与覆盖的方法是一般拓扑学中通用的重要工具, 通过对度量化问题、空间与映射的相互分类原则和积空间的仿紧性等一般拓扑学中重要课题的研究, 导致了广义度量空间理论的建立(Burke, Lutzer[1976]). 什么是广义度量空间？ 或许, 任何推广了可度量性的拓扑性质都可以称为广义度量性质. 然而, 这种说明过于广泛, 适当的限制更为有利于探索可度量性的本质. 粗略地说, 广义度量空间是这样的一些空间类(Gruenhage[1984], Hodel[1998]), 有益于刻画可度量性, 继承了度量空间的许多优美性质且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类, 如是否关于完备映射或闭映射保持? 是否关于子空间或闭子空间遗传? 是否关于有限积或可数积封闭? 是否具有一定的可和性? 是否具有某种的覆盖性质? Hodel[1998]指出: 有许多的理由说明为什么广义度量空间是值得研究的, 或许最重要的理由是这些空间类增加了我们对于度

量空间的理解，此外，拓扑学家正不断地寻找更广泛的空间类使得一些特别重要的结果成立. 正因为如此，从 20 世纪 60 年代起广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向，所涉及的与公理集合论、数理逻辑、组合数学、泛函分析、拓扑群、动力系统等分支相互交融而形成的大量问题已列入专著《Open Problems in Topology》(van Mill, Reed[1990]). 1960 年至 2000 年间在不同时期内所取得的广义度量空间理论的成就已先后总结在一些重要的论著中，如 Arhangel'skii[1966]; Burke, Lutzer[1976]; 高国士[2000]; Gruenhage[1984, 1992]; Hodel[1998]; Kodama, Nagami[1974]; 林寿[1995]; Morita, Nagata[1989]. 许多知名学者不断提出大量有挑战性的问题，汇同一些长期未解决的经典问题成为广义度量空间理论进一步向前发展的源泉. 恰如 Hodel[1998]在总结了广义度量空间理论的阶段性结果后说: "More important perhaps is the fact that the study of generalized metrizable spaces is by no means complete; rather, it continues to grow with many new and impotrant results appearing every year."

1.1 20 世纪 90 年代的广义度量空间理论

什么是 20 世纪 90 年代广义度量空间理论的主要研究课题？我们不妨来看一看这一时期国际上出版的几部拓扑学论著及两次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集中关于广义度量空间理论方面的论题.

1990 年由 van Mill 和 Reed[1990]主编的《Open Problems in Topology》在所列举的 1100 个问题中属于广义度量空间方面的问题大至有

(1.1) 度量化问题与正规 Moore 空间问题(问题 36 至 41, 79 至 84, 98, 298 至 315, 348, 376, 1049, 1056).

(1.2) 点可数基空间及相关问题(问题 120, 313, 320, 322, 366, 375 至 380).

(1.3) M_i 空间问题(问题 321).

(1.4) cosmic 空间问题(问题 199).

(1.5) MOBI 类问题(问题 362 至 372).

(1.6) 紧覆盖映射问题(问题 392 至 394).

(1.7) 单调正规空间问题(问题 381).

1992 年在 Hušek 和 van Mill[1992]主编的《Recent Progress in General Topology》(第 7 次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集)中由 Gruenhage[1992]撰写的"Generalized metric spaces and metrization"总结了 1984 年以来在广义度量空间与度量化方面的重要成果，主要论题有

(2.1) 对称度量空间.

(2.2) 点可数基空间.

(2.3) 单调正规空间与 M_i 空间.

(2.4) Moore 空间、可展空间与严格 p 空间.

(2.5) MOBI 类.

(2.6) Lašnev 空间、cosmic 空间与 k 网.

(2.7) Tychonoff 积与 Σ 积的正规性.

1997 年 Arhangel'skii[1997]在纪念 Alexandroff 诞辰 100 周年的报告"Some recent advances and open problems in general topology"中论述了在过去的 5 至 7 年来作者感兴趣的度量化、映射理论和函数空间理论方面的成果与问题, 所涉及的广义度量空间方面的课题有

(3.1) 点可数基空间与度量化.

(3.2) 具有 G_δ 对角线的空间与可展空间.

(3.3) cosmic 空间与 $\aleph_0$ 空间.

(3.4) 一对一映射与次可度量空间.

(3.5) 紧覆盖映射与诱导完备映射.

1997 年在 Aull 和 Lowen[1997]主编的《Handbook of the History of General Topology, V1》中由 Nagata[1997b]撰写的"The flowering of general topology in Japan"和 Nagata[1997a]撰写的"Recent progress of general topology in Japan"中自 20 世纪 90 年代以来日本在广义度量空间方面的主要工作涉及

(4.1) 度量空间的分解空间及其度量化.

(4.2) Lašnev 空间与 k 网理论.

(4.3) 具有广义度量因子 Σ 积的正规性.

(4.4) 广义度量空间的万有(universal)空间.

1998 年由 Hušek[1998]编辑的第 8 次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集中在所发表的 25 篇特邀报告中有 6 篇是广义度量空间方面的内容, 主要工作涉及

(5.1) 确定度量空间的闭映象与几乎开映象.

(5.2) 单调正规空间.

(5.3) 具有广义度量因子有限积的正规性.

在《莫斯科大学数学力学通报》1999 年第 3 期上发表的纪念 Urysohn 诞辰 100 周年的论文集中发表的 11 篇报告中有 3 篇是广义度量空间方面的内容，主要工作涉及

(6.1) 度量化问题.

(6.2) 度量空间与映射.

(6.3) 弱第一可数性.

从以上所列课题可见，度量化问题依然是一般拓扑学的核心问题，广义度量空间研究的主要对象是具有点可数基的空间、Moore 空间、M_i 空间、单调正规空间、cosmic 空间、Lašnev 空间和 MOBI 类等，主要工具是点可数覆盖、展开列、基、网、k 网、紧覆盖映射和紧映射等. 下面列举一些重要的结果，限于篇幅在此仅能按作者的认识列举出部分的结果，有进一步兴趣的读者可参考书末的相关文献.

关于度量化问题

定理 1.1.1 (1)(Good, Tree[1995]) (ZF)第二可数的正则空间是可度量化空间. (2)(Good, Tree, Watson[1998]) (ZF+DC)Stone 定理不成立：存在非仿紧的度量空间.

定理 1.1.2 (1)(Balogh[1998a]) (ZFC)存在不具有拟 G_δ 对角线的遗传仿紧完正规的 Q 集空间. (2)(Balogh[1998b]) (ZFC)存在非仿紧的正规可遮空间.

定理 1.1.3(高印珠[1996], Moody[1993]) 具有一致(G)和点 G_δ 性质的空间是具有 σ 离散网的半层空间.

定理 1.1.4(Fearnley[1999]) 存在具有 σ 离散 π 基的 Moore 空间不能稠密地嵌入任何具有 Baire 性质的 Moore 空间.

定理 1.1.5(师维学[1999]) 存在不可度量化的紧线性序空间使其每一子空间具有 σ 极小基.

其中，定理 1.1.1 回答了 Läuchli[1962]提出的问题，定理 1.1.2 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 57 和问题 119，定理 1.1.3 推广了从 20 世纪 50 年代至 90 年代的一大批度量化定理，定理 1.1.4 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 303 及 Reed[1974]提出的问题，定理 1.1.5 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 376.

关于紧覆盖映射及映射的相关论题

定理 1.1.6(Debs, Raymond[1996]) 存在三商，紧，可数紧覆盖映射 $f:X\to Y$ 使得 X 是 σ 紧的度量空间, Y 是度量空间，但是 f 不是紧覆盖映射.

定理 1.1.7(Just, Wicke[1994]) 可分度量空间到可数度量空间的可数紧覆盖映射是诱导完备

映射.

定理 1.1.8(陈怀鹏[1999]) 度量空间的商紧映象未必是度量空间的紧覆盖的商 s 映象.

定理 1.1.9(Hansell[1998]) 对于 w(X)=κ, X 是解析(analytic)度量空间当且仅当 X 是 Baire 空间κ^{ω}的闭子空间的几乎开 s 映象.

定理 1.1.10(Mizokami[1993a]) Moore 空间的第一可数的φ扩张是可展空间.

定理 1.1.11(Gruenhage[1998]) 存在 Lindelöf 的正则空间 X 使得闭映射 f:X$\rightarrow$Y 不是诱导不可约映射.

其中, 定理 1.1.6 至定理 1.1.8 分别回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 392 至问题 394, 定理1.1.10 深化了关于 Lašnev 空间度量化的系列结果, 定理 1.1.11 回答了 Ponomarev 的问题(见 van Douwen[1984]第 162 页). 关于紧覆盖映射的一些相关结果见林寿[1998a].

关于积空间

定理 1.1.12(Balogh[1996]) 存在遗传正规, σ 相对离散, 基数 c 的 Dowker 空间.

定理 1.1.13(Kemoto, Yajima[1994]) 设Σ是半层空间的Σ积. 若Σ的每一有限子积是仿紧空间, 那么Σ是正规空间当且仅当它是可数仿紧空间.

定理 1.1.14(Eda, Gruenhage, Koszmider, Tamano[1995]) (CH)Lašnev 空间 S_{ω_2} 的Σ积不是正规空间.

定理 1.1.15(Cook, Reed[1999]) (MA+$\neg$ CH)存在正规, 可分, 局部紧的 Moore 空间 X 使得 X^2 不是正规空间.

其中, 定理 1.1.14 回答了 Kodama 的问题, 定理 1.1.15 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 299 和问题 300.

关于单调正规空间与 $\mathbf{M}_i$ 空间

定理 1.1.16(Rudin[1993]) 存在非 K_0的循环(cyclic)单调正规空间.

定理 1.1.17(Collins[1996]; Gartside, Moody[1996]) 完备映射未必保持弹性(elastic)空间.

定理 1.1.18(Mizokami, Shimane[2000]) M_3的 k 空间是 M_1空间.

其中, 定理 1.1.16 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 381, 定理 1.1.17 回答了 Tamano 和 Vaughan[1971]提出的问题. 定理 1.1.18 是 M_i空间问题(即, M_3空间是否是 M_1空间)的重大进展, 该问题被 Hodel[1998]认为是广义度量空间理论中最重要的尚未解决的问题(the most important

unsolved problem).

关于基、**k** 网与网

定理 1.1.19(Foged[1996]) 存在完全正则的具一致基的空间不具有点可数闭 k 网.

定理 1.1.20(Sakai[1997a]) 空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有由可分子集组成的点可数 k 网的 Fréchet 空间.

定理 1.1.21(Delistathis, Watson[2000]) (CH) 存在 cosmic 空间 X 使得 dim(X)=1 且 ind(X)=Ind(X)=2.

定理 1.1.22(Tkachuk[1998]) 存在连通的 cosmic 空间 X 使得 X 不是连通的可分度量空间的映象.

其中, 定理 1.1.19 回答了 Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]提出的问题, 定理 1.1.21 回答了 Arhangel'skii[1966]提出的问题.

下面介绍国内学者关于广义度量空间理论的贡献. 国内较早并长期从事广义度量空间理论研究的学者当属高国士教授和高智民教授. 在 20 世纪 70 年代末至 80 年代我国学者就已在广义度量空间理论中作出不少值得称赞的成果(刘应明[1982]; 刘应明, 蒋继光[1989]). 进入 20 世纪 90 年代我国学者每年都产生了不少广义度量空间理论方面优秀的成果, 这首先得益于国家自然科学基金加大对基础研究的投入力度, 其次得益于国内学者与日本、美国、俄罗斯、加拿大、新西兰、芬兰等国学者较为广泛的合作. 据不完全统计, 1990 年至 1999 年, 四川大学、山东大学、西北大学、首都师范大学、苏州大学、广西大学、宁德师范高等专科学校等校至少主持过 16 项与广义度量空间理论相关的国家自然科学基金资助项目的研究工作, 国家自然科学基金还资助了 1993 年的苏州国际一般拓扑学学术会议、1997 年的金华国际拓扑学学术会议、1998 年的北京国际一般拓扑学学术会议以及部分学者的"国际合作与交流项目"、"资助出国参加国际学术会议项目". 这也从另一角度说明了国内关于广义度量空间理论的研究成果是极为丰富和具有相当的影响力.

在此, 我们简略报告国内学者 20 世纪 90 年代在广义度量空间理论方面一些具有一定影响或较多引用的工作. 1990 年至 1993 年恽自求(Junnila, 恽自求[1992]; 恽自求[1990, 1991, 1993])获得了$\aleph$空间的系列结果, 如 Junnila 与他证明了$\aleph$空间等价于不含有闭子空间同胚于S_{ω_1}的具有σ遗传闭包保持 k 网的空间. 1990 年至 1993 年滕辉(Tamano, 滕辉[1993]; 滕辉[1990a, 1990b, 1991])系统地探讨了广义度量空间的Σ积和σ积, 解决了 Chiba, Nagami 和 Yajima 提出的几个问题, 如证明了半层空间族的Σ积是集态次正规空间. 1992 年 Milner 与王尚志[1992]建立了广义序空间的

嵌入定理与度量化定理并解决了 Lutzer[1971]提出的困难问题被国际拓扑学界称为是度量化方面最有趣的结果之一. 1992 年钟宁[1992]在困难的 M_3 空间上取得了一些进展，如她得到了具有 M_3 因子的乘积空间的正规性定理. 1992 年至 1993 年高智民(高智民[1992]；高智民, Nagata[1993])证明了几个由弱基决定的空间的性质，如具有 σ 闭包保持弱基的正规空间是仿紧空间. 1993 年王延庚与王成堂[1993]研究了判断 B_r 空间的一般性方法. 1993 年至 1996 年刘川与戴牧民(刘川[1993, 1995]；刘川，戴牧民[1994, 1995, 1996])在遗传闭包保持集族、弱基及度量空间的紧覆盖 s 映象方面进行了大量的工作，尤其是证明了 g 可度量空间等价于不含有闭子空间同胚于 S_ω 的具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 k 空间. 1994 年杨乐成[1994]建立了 Σ 积正规性的等价条件，证明了仿紧 σ 空间的 Σ 积是正规空间当且仅当它是可数仿紧空间. 1995 年林寿[1995]出版了著作《广义度量空间与映射》. 1996 年高印珠[1996]在 Collins-Reed-Roscoe-Rudin 度量化定理上取得了很精致的结果: 具有一致(G)和点 G_δ 性质的空间是具有 σ 离散网的半层空间. 1996 年至 1998 年刘川与 Tanaka[1996a, 1996b, 1996c, 1998a, 1998b]在星可数 k 网及相关的紧可数 k 网、σ 点有限 k 网、局部可分度量空间的映象等方面完成了一系列系统的工作，如证明了空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当它是具有星可数 k 网的 Fréchet 空间. 1997 年冯秀峰与 Tamano[1997]证明了可数多个 Lašnev 空间积的可数扇密度子空间是可度量空间，解决了 Arhangel'skii 和 Bella[1996]提出的问题. 1996 年至 2000 年林寿与戴牧民、刘川、Tanaka、燕鹏飞(林寿[1996a, 1996b, 1996c, 1997a, 1997b, 1997c, 1997d, 1998a, 1998b, 1998c, 1999a]；林寿，刘川[1996]；林寿，刘川，戴牧民[1997]；林寿，Tanaka[1994]；林寿，燕鹏飞[1998, 2001a, 2001b]；林寿，燕鹏飞，刘川[1999]；刘川，林寿[1997]；燕鹏飞，林寿[1999a, 1999b])在点可数覆盖及相关的序列覆盖映射、紧覆盖映射、局部可分度量空间的映象和乘积空间的 k 空间性质等方面也做了较系统的工作，如证明了度量空间的商 s 映象是具有点可数基的空间当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω. 1999 年师维学[1999]构造了不可度量化的紧线性序空间使其每一子空间具有 σ 极小基，否定了 Bennett 和 Lutzer[1977]在 Topology Proceedings 上提出的经典问题, 1999 年陈怀鹏[1999]构造了度量空间的商紧映象使其不是任一度量空间的紧覆盖的商 s 映象，否定了 Michael 和 Nagami[1973]提出的另一经典问题. 2000 年高国士[2000]出版了著作《拓扑空间论》.

此外，高智民[1998b, 2000]与恽自求等[2000]围绕 Nagata 问题关于广义度量空间的 g 函数刻画，周浩旋(Fitzpatrick，周浩旋[1994]；Williams，周浩旋[1998])关于度量空间的拓扑完备化和单

调正规空间的工作, 杨忠强[1994a, 1994b, 1998, 1999, 2001]关于超紧空间的工作, 陈怀鹏[1995]关于乘积空间的 k 空间性质, 王延庚[1997]关于局部紧空间的函数空间的工作, 侯吉成[1998]关于超空间的特征和 tightness 的工作, 曹继岭等[1998]关于拟一致结构和拟可度量空间的工作, 周金元等(Dow, 周金元[1999]; 周金元[1993, 1994])关于伪径向(pseudoradial)空间的工作, 江守礼和王树泉等[1999]关于 S(n)-θ 闭空间的工作, 彭良雪[2000]关于σ遗传闭包保持 k 网空间的工作等都是国内关于广义度量空间理论及相关课题的较好工作, 限于篇幅, 我们不在此一一叙述.

1.2 记号与术语

本书使用了选择公理的几种等价形式, 如 Zorn 引理, 紧空间乘积的 Tychonoff 定理和良序定理, 同时也使用了一些附加的集论公理, 如连续统假设(CH), Martin 公理(MA)和 BF(ω_2). 我们的绝大部分结果都是在 ZFC(即, Zermelo-Fraenkel 集论公理加选择公理)中讨论, 几个附加的集论公理将在适当的章节中给予介绍. 本节定义一些记号和术语.

以 R 表示实直线, N, Q 和 I 分别表示 R 的自然数子集, 有理数子集和单位闭区间. 记 $S_1=\{0\}\cup\{1/n: n\in N\}$. ω有三种含意, 一是 R 的子集 $N\cup\{0\}$, 二是第一个无限序数, 三是最小的无限基数, 它们的确切意义在上下文中是不会混淆的. 对于空间 X, $\tau(X)$(在不引起混淆时记τ)表示 X 上的拓扑. 本书所论空间均指满足 T_2 分离性条件的拓扑空间, 映射指连续的满函数. 对于集合 X 的子集族 $\mathcal{P}$, $x\in X$ 和 $A\subset X$, 记

$$(\mathcal{P})_x=\{P\in\mathcal{P}: x\in P\},\ (\mathcal{P})_A=\{P\in\mathcal{P}: P\cap A\neq\varnothing\},\ \mathcal{P}_{|A}=\{P\cap A: P\in\mathcal{P}\},$$

$$st(x,\mathcal{P})=\cup(\mathcal{P})_x,\ st(A,\mathcal{P})=\cup\{P\in\mathcal{P}: P\cap A\neq\varnothing\},$$

$$\mathcal{P}^{<\omega}=\{\mathcal{F}\subset\mathcal{P}: \mathcal{F}\text{是有限的}\}.$$

若 x_n $(n\in N)$是 X 中的一列点, $\langle x_n\rangle$表示 X 的子集$\{x_n: n\in N\}$; (x_n)表示笛卡儿积 X^ω 中的第 n 个坐标为 x_n 的点; 象通常一样, $\{x_n\}$表示 X 中的第 n 项为 x_n 的序列. 对于 X 中有多个下标的序列, 如$\{x_{nm}\}$, 分别记$\{x_{nm}\}_n$和$\{x_{nm}\}_m$为固定 m 关于 n 和固定 n 关于 m 的序列. 若空间 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x, 记$[x_n]=\{x\}\cup\{x_n: n\in N\}$. 对于空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 及映射 $f:X\to Y$, 分别

记 $\mathcal{P}$ 的闭包 cl($\mathcal{P}$)={cl(P) : P$\in\mathcal{P}$}及 $\mathcal{P}$ 在 f 的象 f($\mathcal{P}$)={f(P) : P$\in\mathcal{P}$}. 对于积空间 $\prod_{n\in N} X_n$ 及 m$\in$N, 以 π_m: $\prod_{n\in N} X_n \to X_m$ 表示 $\prod_{n\in N} X_n$ 在第 m 个坐标上的投影映射. 以符号 ▌表示命题论证结束或命题是不证自明的.

未定义的术语以 Engelking[1977]和林寿[1995]为准. 为叙述的方便起见, 在引用文献时一些在林寿[1995]中论证过的命题有时以林寿[1995]代替原始文献, 请这些命题的作者谅解. 先回忆一些重要的距离函数、映射类及覆盖族.

定义 1.2.1 对于集合 X, 设 d: X×X$\to$[0, ∞). 对于 A, C$\subset$X, x$\in$X, ε>0, 置

diamA=sup{d(x, y) : x, y$\in$A},

d(A, C)=inf{d(x, y) : x$\in$A, y$\in$C},

B(x, ε)={y$\in$X : d(x, y)<ε}.

考虑下述条件: 对于 x, y, z$\in$X,

(1) d(x, y)=0 当且仅当 x=y.

(2) d(x, y)=d(y, x).

(3) d(x, y)$\le$d(x, z)+d(z, y).

满足条件(1)~(3)的函数 d 称为 X 上的距离, 满足条件(1)和(2)的函数 d 称为 X 上的对称距离. 空间(X, d)称为度量空间, 若 X 是以{B(x, ε) : x$\in$X, ε>0}为基生成的拓扑空间. 空间(X, d)称为对称度量空间, 若 X 的子集 U 是 X 的开子集当且仅当对于每一 x$\in$U, 存在 ε>0 使得 B(x, ε)$\subset$U. 空间(X, d)称为半度量空间, 若(X, d)是对称度量空间且对于每一 x$\in$X 和 ε>0 有 x$\in$intB(x, ε). 这拓扑也称为由 d 生成的拓扑. 若空间 X 的拓扑可由距离(对称距离)d 生成, 那么 d 称为 X 上的度量(对称度量), X 称为可度量空间(可对称度量空间).

设 X 是度量空间, X 称为正规度量空间(Mrowka[1965]), 若 X 的非孤立点集是 X 的紧子集. 正规度量空间最初的定义是“存在 X 上的度量 d 使得对于 X 中互不相交的闭子集对 A, B 有 d(A, B)>0”. 这与“X 的非孤立点集是 X 的紧子集”是等价的(Mrowka[1965]).

定义 1.2.2(Engelking[1977] 设映射 f:X$\to$Y.

(1) f 称为有限到一映射, 若每一 f^{-1}(y)是 X 的有限子集.

(2) f 称为紧映射, 若每一 f^{-1}(y)是 X 的紧子集.

(1) f 称为 s 映射，若每一 $f^{-1}(y)$是 X 的可分子集.

(4) f 称为商映射，若 $f^{-1}(U)$是 X 的开子集，则 U 是 Y 的开子集.

(5) f 称为伪开映射，若 V 是 X 的开子集且 $f^{-1}(y)\subset V$，则 f(V)是 y 在 Y 中的邻域.

(6) f 称为几乎开映射，若对于 $y\in Y$，存在 $x\in f^{-1}(y)$使得如果 U 是 x 在 X 中的邻域，则 f(U)是 y 在 Y 中的邻域.

(7) f 称为开映射，若 V 是 X 的开子集，则 f(V)是 Y 的开子集.

(8) f 称为闭映射，若 F 是 X 的闭子集，则 f(F)是 Y 的闭子集.

(9) f 称为完备映射，若 f 是闭且紧的映射.

易验证

开映射 $\Rightarrow$ 几乎开映射

$\Downarrow$

有限到一闭映射 $\Rightarrow$ 完备映射 $\Rightarrow$ 闭映射 $\Rightarrow$ 伪开映射 $\Rightarrow$ 商映射.

定义 1.2.3 设映射 $f:X\to Y$.

(1)(Michael[1966]) f 称为紧覆盖映射，若 Y 的任一紧子集是 X 中某紧子集在 f 下的象.

(2)(Boone, Siwiec[1976]) f 称为序列商映射，若$\{y_n\}$是 Y 中的收敛序列，那么存在$\{y_n\}$的子序列$\{y_{n_i}\}$和 X 中的收敛序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_{n_i})$.

(3)(Siwiec[1971]) f 称为序列覆盖映射，若$\{y_n\}$是 Y 中的收敛序列，那么存在 X 中的收敛序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

(4)(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]; Ikeda, 刘川, Tanaka[2001]) f 称为伪序列覆盖映射，若 Y 中的任一(含极限点的)收敛序列是 X 中某紧子集在 f 下的象.

(5)(林寿，刘川，戴牧民[1997]) f 称为子序列覆盖映射，若$\{y_n\}$是 Y 中的收敛序列，那么存在 X 中的紧子集 K 使得 f(K)是$\{y_n\}$的子序列.

(6)(林寿[1996c]) f 称为 1 序列覆盖映射，若对于 $y\in Y$ 存在 $x\in f^{-1}(y)$满足：如果 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y，那么存在 X 中收敛于点 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

(7)(林寿[1996c]) f 称为 2 序列覆盖映射，若对于 $y\in Y$ 及 $x\in f^{-1}(y)$满足：如果 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y，那么存在 X 中收敛于点 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

1971 年 Siwiec[1971]称定义 1.2.3(3)的映射为序列覆盖映射，1984 年 Gruenhage，Michael 和 Tanaka[1984]也称定义 1.2.3(4)的映射为序列覆盖映射，为不引起混淆，我们在此采用 Ikeda，刘川和 Tanaka[2001]的术语称定义 1.2.3(4)的映射为伪序列覆盖映射.

易验证

完备映射$\Rightarrow$紧覆盖映射

$\Downarrow$

伪序列覆盖映射

2 序列覆盖映射$\Rightarrow$1 序列覆盖映射$\Rightarrow$序列覆盖映射 $\nearrow$ 伪序列覆盖映射 $\searrow$ 子序列覆盖映射.

序列覆盖映射 $\searrow$ 序列商映射 $\nearrow$ 子序列覆盖映射.

定义 1.2.4 设 X 是一个空间, $P\subset X$.

(1) 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x，称$\{x_n\}$是终于 P 的，如果存在 $m\in N$ 使得$\{x\}\cup\{x_n : n\geq m\}\subset P$.

(2) P 称为 X 中的点 x 的序列邻域，若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x，则$\{x_n\}$是终于 P 的.

(3) P 称为 X 的序列开集，若 P 是 P 中每一点的序列邻域.

(4) P 称为 X 的序列闭集，若 $X\setminus P$ 是 X 的序列开集.

(5)(Franklin[1965]) X 称为序列空间，若 X 的每一序列开集是 X 的开集.

(6)(Gale[1950]) X 称为 k 空间，若 $A\subset X$ 使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K\cap A$ 是 K 的闭子集，则 A 是 X 的闭子集.

(7)(Franklin[1965]) X 称为 Fréchet 空间，若 $x\in cl(A)\subset X$，则存在 A 中点组成的序列$\{x_n\}$使得在 X 中$\{x_n\}$收敛于 x.

(8)(Siwiec[1971]) X 称为强 Fréchet 空间，若$\{A_n\}$是 X 中递减的集列且 $x\in\bigcap_{n\in N} cl(A_n)$，则存在 $x_n\in A_n$ $(n\in N)$使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x.

显然，第一可数空间$\Rightarrow$强 Fréchet 空间$\Rightarrow$Fréchet 空间$\Rightarrow$序列空间$\Rightarrow$k 空间. 这些空间类我们统称为弱第一可数空间. 易证明，对于空间 X 的子集 P，若 X 中的每一收敛于 x 的序列存在子序列是终于 P 的，则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

定义 1.2.5(Engelking[1977]) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的点有限集族，若对于每一 $x\in X$, $(\mathcal{P})_x$ 是有限的.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的点可数集族，若对于每一 $x\in X$, $(\mathcal{P})_x$ 是可数的.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧有限集族，若对于 X 的每一紧子集 K, $(\mathcal{P})_K$ 是有限的.

(4) $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧可数集族，若对于 X 的每一紧子集 K, $(\mathcal{P})_K$ 是可数的.

(5) $\mathcal{P}$ 称为 X 的星可数集族，若对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $(\mathcal{P})_P$ 是可数的.

(6) $\mathcal{P}$ 称为 X 的离散集族，若对于每一 $x\in X$，存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得$(\mathcal{P})_U$ 至多只有一个元.

(7) $\mathcal{P}$ 称为 X 的局部有限集族，若对于每一 $x\in X$，存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得$(\mathcal{P})_U$ 是有限的.

(8) $\mathcal{P}$ 称为 X 的局部可数集族，若对于每一 $x\in X$，存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得$(\mathcal{P})_U$ 是可数的.

(9) $\mathcal{P}$ 称为 X 的闭包保持集族，若对于每一 $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$，有 $cl(\cup\mathcal{P}')=\cup\{cl(P) : P\in\mathcal{P}'\}$.

(10) $\mathcal{P}$ 称为X的遗传闭包保持集族，若对于每一 $H(P)\subset P\in\mathcal{P}$，集族$\{H(P) : P\in\mathcal{P}\}$是闭包保持的.

(11) $\mathcal{P}$ 称为 X 的弱遗传闭包保持集族，若对于每一 $p(P)\in P\in\mathcal{P}$，集族$\{\{p(P)\} : P\in\mathcal{P}\}$是闭包保持的.

设 Φ 是定义 1.2.5 所定义的一种集族性质，称空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 是 σ - Φ 的，若 $\mathcal{P}$ 是可数个具有性质 Φ 的集族之并.

下面定义两类生成空间拓扑的覆盖.

定义 1.2.6　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1)(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]) 空间 X 称为关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑，如果对于 $A\subset X$, A 是 X 的闭子集当且仅当对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $P\cap A$ 是 P 的闭子集.

(2)(Morita[1953]) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的闭覆盖，称 X 被 $\mathcal{P}$ 所控制(dominated)，若对于 $\mathcal{P}$ 的任一子集族 $\mathcal{P}'$，$\cup\mathcal{P}'$是 X 的闭子集且 $A\subset\cup\mathcal{P}'$是闭的当且仅当对于每一 $P\in\mathcal{P}'$, $P\cap A$ 是 P 的闭子集.

空间 X 称为 k_ω 空间(Franklin, Thomas[1977a])，若 X 关于某一由紧子集组成的可数闭覆盖具有弱拓扑.

“弱拓扑”在文献中有不同的含意．我们所称的“控制”，在有些文献中称为“弱拓扑”或“Whitehead 弱拓扑”．空间 X 关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑，Dugundji[1966]称为“The weak topology in X determined by $\mathcal{P}$”，而 Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]称为“A space X is determined by $\mathcal{P}$”．由于 determined(确定)一词在中文表达时易混淆，本书仍使用术语“弱拓扑”．易验证，空间 X 是 k 空间当且仅当 X 关于全体紧子集所组成的覆盖具有弱拓扑，空间 X 是序列空间当且仅当 X 关于全体紧度量子集(或收敛序列)所组成的覆盖具有弱拓扑．可数 CW 复形是 k_ω 空间．空间 X 的遗传闭包保持的闭覆盖是 X 的控制族，而空间 X 的控制族是 X 的闭包保持的闭覆盖．

定义 1.2.7　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1)(Arhangel’skii[1959]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的网，若 X 的每一开子集是 $\mathcal{P}$ 的某子集族的并.

(2)(O’Meara[1971]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网，若对于 X 中的每一紧子集 K 及 X 中包含 K 的开子集 V，存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $K\subset\cup\mathcal{P}'\subset V$.

(3)(Guthrie[1971]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网，若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得序列 $\{x_n\}$ 是终于 P 的且 $P\subset V$.

(4)(高智民[1987]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs*网，若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得序列 $\{x_n\}$ 的某子序列是终于 P 的且 $P\subset V$.

(5)(林寿[1997a]) 空间 X 称为 csf 可数空间，如果 X 存在子集族 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 使得每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中可数的 cs 网.

若空间 X 的 k 网 $\mathcal{P}$ 的每一元是 X 的闭子集(紧子集，可分子集，可度量子集)，则称 $\mathcal{P}$ 是 X 的闭 k 网(紧 k 网，可分 k 网，可度量 k 网)．类似可定义 1.2.7 中的相关概念.

具有可数网的空间称为 cosmic 空间(Michael[1966])，具有可数 k 网的空间称为 $\aleph_0$ 空间(Michael[1966])，具有 σ 局部有限网的空间称为 σ 空间(Okuyama[1967])，具有 σ 局部有限 k 网的空间称为 $\aleph$ 空间(O’Meara[1971])．特别提醒读者注意，在大多数文献中，cosmic 空间，σ 空间，$\aleph_0$ 空间与 $\aleph$ 空间都预先假设正则性．由于本书所论空间是在 T_2 空间中，为了使命题更具有一般性，所以这四类空间都未预先假设正则性．术语 cs*网由高智民[1987]引入，研究表明它是一个很重要的概念, Tanaka[1987b]曾记 cs*网为条件(C_1).

定义 1.2.8 设空间 X 的子集族 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 满足: 对于 $x\in X$, $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网, 即 $\mathcal{P}_x\subset(\mathcal{P})_x$ 且若 $x\in G\in\tau$, 存在 $P\in\mathcal{P}_x$ 使得 $P\subset G$; 并且如果 $U, V\in\mathcal{P}_x$, 那么存在 $W\in\mathcal{P}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$.

(1)(林寿[1996c]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列邻域网, 若每一 $\mathcal{P}_x$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域.

(2)(林寿[1996c]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列开网, 若每一 $\mathcal{P}_x$ 的元是 X 的序列开集.

(3)(Arhangel'skii[1966]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的弱基, 若 $G\subset X$ 使得对于 $x\in G$ 存在 $P\in\mathcal{P}_x$, 有 $P\subset G$, 那么 G 是 X 的开子集.

上述 $\mathcal{P}_x$ 分别称为 x 在 X 中的序列邻域网(简记为 sn 网), 序列开网(简记为 so 网)和弱基(或弱邻域基, 弱邻域网).

(4)(Arhangel'skii[1966], 林寿[1997a]) 若空间 X 的每一点都有可数的 sn 网(so 网, 弱基), 则称 X 是 snf 可数(sof 可数, gf 可数)空间.

(5)(Siwiec[1974]) 具有 σ 局部有限弱基的正则空间称为 g 可度量空间.

覆盖性质在发展广义度量理论中起了很大的作用. 这两个一般拓扑学的研究方向时常是难以区分的, 其中一个方向的进展立即导致另一方向的进展. 为了完备起见, 我们定义几个需使用的覆盖性质与正规性.

定义 1.2.9(Burke[1984]) 设 X 是一个空间.

(1) X 称为仿紧空间, 若 X 的每一开覆盖存在局部有限的开加细.

(2) X 称为次仿紧空间, 若 X 的每一开覆盖存在 σ 局部有限的闭加细.

(3) X 称为亚 Lindelöf 空间, 若 X 的每一开覆盖存在点可数的开加细.

(4)(Heath, Lutzer, Zenor[1973]) X 称为单调正规空间, 若存在对应 $G: X\times\tau(X)\to\tau(X)$满足

(4.1) $x\in G(x, U)\subset U$.

(4.2) 若 $U\subset V$, 则 $G(x, U)\subset G(x, V)$.

(4.3) 若 $x\neq y$, 则 $G(x, X\setminus\{y\})\cap G(y, X\setminus\{x\})=\varnothing$.

(5) X 称为集态正规空间, 若 X 的每一离散的闭子集族存在两两互不相交的开扩张.

此处, 对于 X 的子集族 $\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$和 $\mathcal{G}=\{G_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 若每一 $F_\alpha\subset G_\alpha$, 则称 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的扩张.

易验证, 度量空间是仿紧空间和单调正规空间, 正则的 σ 空间是次仿紧空间, 单调正规空间

是集态正规空间, 仿紧空间是次仿紧空间和亚 Lindelöf 空间, 次仿紧的集态正规空间是仿紧空间, 可分的亚 Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间(Burke[1984]).

本节的最后定义几个特殊的商空间, 如 S_2, S_ω 和 S_{ω_1}.

定义 1.2.10 设序列 $T_0=\{a_n\}$收敛于 $x_0\notin T_0$且设每一序列 T_n ($n\in N$)收敛于 $a_n\notin T_n$. 让 T 是空间族<$T_n\cup\{a_n\}$>的拓扑和. $S_2=\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\in\omega}T_n)$是由贴合空间$(T_0\cup\{x_0\})\oplus T$中的每一 $a_n\in T_0$与 $a_n\in T$ 所得到的商空间. $S_\omega=\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\in N}T_n)$是由贴合空间 T 中所有的 $a_n\in T$ 到一点 x_0所得到的商空间. 即 S_ω 是把可数多个非平凡的收敛序列的拓扑和中的非孤立点贴成一点所成的商空间. 一般地, 对于基数$\alpha\geq\omega$, S_α 是把α个非平凡的收敛序列的拓扑和中的非孤立点贴成一点所成的商空间. S_2 称为 Arens 空间(Arens[1950]), S_ω 称为序列扇(Arhangel'skii, Franklin[1968]). 对于基数$\alpha\geq\omega$, 形如S_α 的空间统称为扇空间.

我们可以将空间 S_2 和 S_ω 一般化.

定义 1.2.11 对于空间 X, 及 $x\in X$. X 的子集 C 称为空间 X(在点 x)的梳(林寿[1997a]), 如果 $C=\{x\}\cup\langle x_n\rangle\cup\{x_{nm}: n, m\in N\}$, 其中序列$\{x_n\}$收敛于 x, 对于每一 $n\in N$, 序列$\{x_{nm}\}_m$收敛于 x_n, 且 x, x_n 及 x_{nm} 的各项是两两互不相同的. 设 C 是 X 的梳, C 的子集 D 称为 C 的对角, 如果 D 是 C 的收敛序列且 D 与无限个关于 m 的序列$\{x_{nm}\}_m$相交. X 的子集 F 称为空间 X(在点 x)的扇(林寿[1997a]), 如果 $F=\{x\}\cup\{x_{nm}: n, m\in N\}$, 其中对于每一 $n\in N$, 序列$\{x_{nm}\}_m$收敛于 x, 且 x 及 x_{nm} 的各项是两两互不相同的. 设 F 是 X 的扇, F 的子集 D 称为 F 的对角, 如果 D 是 F 的收敛序列且 D 与无限个关于 m 的序列$\{x_{nm}\}_m$相交. 空间 X 称为α_4空间(Arhangel'skii[1972, 1981], Nogura[1985]), 如果对于 $x\in X$, X 的每一在 x 的扇有对角收敛于 x.

Nogura, Shibakov[1996]也提出扇及收敛对角的概念. α_4 空间是采用 Nogura[1985]的术语, 而 Arhangel'skii[1972, 1981]在讨论 Fréchet 空间的乘积性质时把这空间命名为类<4>.

1.3 预备知识: 广义度量空间类与度量空间的映象

本节及下一节的大部分内容已出现在《广义度量空间与映射》中. 为了完备起见, 我们将本

书要使用的一些相关内容做为预备知识列于这二节，除了可度量空间与σ空间的两个著名特征定理(见定理1.3.1 和定理1.3.5)没有给出论证外，其余的结果都给出了详细的证明. 本节主要包含两部分内容，一是几类重要的广义度量空间的刻画与映射定理，二是描述将具有点可数覆盖空间表示为度量空间映象的 Ponomarev 方法.

定理 1.3.1　对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是可度量空间.

(2) X 是具有σ局部有限基的正则空间.

(3) X 存在开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$使得对于 X 的任一紧子集 K, $\langle st(K, \mathcal{U}_n)\rangle$是 K 在 X 中的邻域基.

(4) X 存在展开$\{\mathcal{U}_n\}$使得每一$\mathcal{U}_{n+1}$星加细$\mathcal{U}_n$. █

证明见林寿[1995]的定理 1.3.3. 此处，X 的开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$称为 X 的展开，若对于每一$x\in X$，$\langle st(x, \mathcal{U}_n)\rangle$是 x 在 X 中的邻域基，具有展开的空间称为可展空间(Engelking[1977])；而称 X 的覆盖$\mathcal{U}_{n+1}$星加细$\mathcal{U}_n$ (Engelking[1977])，若对于每一$U\in\mathcal{U}_{n+1}$，存在$V\in\mathcal{U}_n$使得$st(U, \mathcal{U}_{n+1})\subset V$.

引理 1.3.2　设$f:X\to Y$是闭映射，则存在 X 的闭子空间 Z 使得$g=f_{|Z}: Z\to Y$是闭映射且每一$g^{-1}(y)$或者是单点集，或者是$\partial f^{-1}(y)$.

证明. 对于每一 $y\in Y$，取定点 $p_y\in f^{-1}(y)$. 置 $Z=\cup\{\partial f^{-1}(y) : \partial f^{-1}(y)\neq\varnothing\}\cup\{p_y : \partial f^{-1}(y)=\varnothing\}$，则 Z 是 X 的闭子空间, $g=f_{|Z}: Z\to Y$是闭映射且每一$g^{-1}(y)$或者是单点集，或者是$\partial f^{-1}(y)$. █

如下是著名的 Hanai-Morita-Stone 定理(Engelking[1977]).

定理 1.3.3　设 X 是可度量空间. 若 $f:X\to Y$ 是闭映射，则下述条件相互等价:

(1) Y 是可度量空间.

(2) Y 是第一可数空间.

(3) 每一$\partial f^{-1}(y)$是 X 的紧子集.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 显然.

(2)$\Rightarrow$(3). 若存在 $y\in Y$ 使得$\partial f^{-1}(y)$不是 X 的紧子集，则有$\partial f^{-1}(y)$的可数闭离散子空间$\langle x_i\rangle$，于是存在 X 的离散开子集族$\langle V_i\rangle$使得每一$x_i\in V_i$. 让$\langle G_i\rangle$是 y 在 Y 中的局部基. 由于

$x_i \in \partial f^{-1}(y)$, 由归纳法可选取 $z_1 \in V_1 \cap f^{-1}(G_1) \setminus f^{-1}(y)$, $z_{i+1} \in V_{i+1} \cap f^{-1}(G_{i+1}) \setminus f^{-1}(\{y, f(z_1), \ldots, f(z_i)\})$. 因为 $f(z_i) \in G_i$, $\{f(z_i)\}$在 Y 中收敛于 y, 然而 $z_i \in V_i$ 且 f 是闭映射, 于是$\{f(z_i)\}$在 Y 中无聚点, 矛盾.

(3)$\Rightarrow$(1). 由引理 1.3.2, 不妨设 f 是完备映射. 由定理 1.3.1, 存在 X 的开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$使得对于 X 的任一紧子集 K, <st(K, $\mathcal{U}_n$)>是 K 在 X 中的邻域基. 对于每一 $n \in N$, 置 $\mathcal{V}_n = \{Y \setminus f(X \setminus U) : U \in \mathcal{U}_n\}$, 那么$\{\mathcal{V}_n\}$是 Y 的开覆盖列且满足如果 H 是 Y 的紧子集, 则<st(H, $\mathcal{V}_n$)>是 H 在 Y 中的邻域基. 因此, Y 是可度量空间. ▊

定理 1.3.4(Jayanthan, Kannay[1988]) 设 X 是度量空间, 下述条件相互等价:

(1) X 是正规度量空间.

(2) X 的任一闭映象是可度量空间.

(3) X 的任一闭子集的边界是 X 的紧子集.

证明. 由定理 1.3.3 只须证(2)$\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(3).

(2)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 的任一闭映象是可度量空间. 让 F 是 X 的非孤立点的集合, 若 F 不是 X 的紧子集, 则 F 含有可数的闭离散子空间 A. 让 f 是从 X 到 X/A 上的商映射, 则 f 是闭映射且 $\partial f^{-1}(\{A\})=A$ 不是 X 的紧子集, 于是 X/A 不是可度量空间, 矛盾. 故 F 是 X 的紧子集, 所以 X 是正规度量空间.

(1)$\Rightarrow$(3). 设 X 是正规度量空间且 F 是 X 的闭子集. 如果 x 是 X 的孤立点, 那么 $x \notin \partial F$, 于是∂F 是 X 的非孤立点集的闭子集, 从而∂F 是 X 的紧子集. ▊

对于σ 空间有比度量空间更出色的刻画.

定理 1.3.5 对于正则空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是σ 空间.

(2) X 具有σ 离散网.

(3) X 具有σ 闭包保持网. ▊

证明见林寿[1995]的定理 3.3.1.

下面转入讨论度量空间的映象. 先介绍两个点可数覆盖的性质. 如下的 Miščenko 引理是我们处理点可数覆盖的重要工具, 它的叙述形式及证明方法我们将多次使用. 对于空间 X 的子集 A 及 A 的覆盖 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ 称为 A 的极小覆盖, 若对于每一 $P \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \setminus \{P\}$不是 A 的覆盖.

引理 1.3.6(Miščenko[1962])　如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数覆盖，那么 X 的每一非空子集仅有至多可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的有限极小覆盖.

证明. 设 A 是空间 X 的任一非空子集且$\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 A 的有限极小覆盖全体. 若引理不成立，则存在$n\in N$使得集族$\mathcal{R}=\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda, |\mathcal{P}_\alpha|=n\}$是不可数的. 对于$P\in\mathcal{P}$，令$\mathcal{R}(P)=\{\mathcal{P}_\alpha : P\in\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}\}$. 取$x_1\in A$, 则$\mathcal{R}=\cup\{\mathcal{R}(P) : x_1\in P\in\mathcal{P}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是点可数的，于是存在$P_1\in\mathcal{P}$使得$x_1\in P_1$且满足$|\mathcal{R}(P_1)|>\omega$. 若 n=1，则$|\mathcal{R}(P_1)|=1$，矛盾，故 n>1. 由于$\mathcal{R}(P_1)$的每一元是 A 的极小覆盖，故存在 $x_2\in A\setminus P_1$. 令 $\mathcal{R}(P_1, P)=\{\mathcal{P}_\alpha : P\in\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}(P_1)\}$，则$\mathcal{R}(P_1)=\cup\{\mathcal{R}(P_1, P) : x_2\in P\in\mathcal{P}\}$. 因此，存在$P_2\in\mathcal{P}$使得$x_2\in P_2$, $P_2\neq P_1$且$|\mathcal{R}(P_1, P_2)|>\omega$. 重复上述过程，可得到点集$\{x_i\}_{i\le n}$及集族$\{P_i\}_{i\le n}$满足：每一$x_i\in P_i\in\mathcal{P}$，当$i\neq j$时$P_i\neq P_j$且$|\mathcal{R}(P_1, P_2,\ldots, P_n)|>\omega$，但是$|\mathcal{R}(P_1, P_2,\ldots, P_n)|=1$，矛盾. 故，由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 A 的有限极小覆盖至多是可数的. ∎

引理 1.3.7　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs*网. 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x，记 $K=[x_n]$，则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足

(1) $<\cup\mathcal{P}_n>$是 K 在 X 中的网.

(2) 每一 $\mathcal{P}_n|_K$ 是 X 的非空闭子集族.

(3) 对于 $y\in K$ 及 $P_n\in(\mathcal{P}_n)_y$，$\langle P_n\rangle$是 y 在 X 中的网.

(4) 若更设 $\mathcal{P}$ 关于有限交封闭，则每一 $\mathcal{P}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{P}_n$.

证明. 不妨设所有的 x_n 是两两互不相同的. 先证明对于 $K\subset U\in\tau$，存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 满足

(7.1) $K\subset\cup\mathcal{F}\subset U$.

(7.2) $\mathcal{F}|_K$ 是 X 的非空的闭子集族.

令$\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P} : x\in P\subset U\}=\langle P_i\rangle$. 对于 $k\in N$，若序列$\{x_n\}$是不终于$\bigcup_{i\le k}P_i$ 的，则存在子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一 $x_{n_k}\in X\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$，从而有$\{x_{n_k}\}$的子序列$\{x_{n_{k(j)}}\}$和 $m\in N$ 使得$<x_{n_{k(j)}}>\subset P_m$，矛盾. 因此存在 $k\in N$ 使得$\{x_n\}$是终于$\bigcup_{i\le k}P_i$ 的. 由此易作出 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 满足条件(7.1)和(7.2). 集

族的这种性质记为 F*(K, U).

现在, 置$\Phi=\{\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}:\mathcal{F}$具有性质 F*(K, X)}, 则$\Phi$是可数的. 记$\mathcal{H}=\langle\mathcal{P}_n\rangle$. 显然, $\{\mathcal{P}_n\}$满足(1)和(2). 设$y\in K$且对于$n\in N$有$P_n\in(\mathcal{P}_n)_y$, 若$y\in V\in\tau$, 如果y=x, 令$K_1=V\cap K$, 则存在$\mathcal{F}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$具有性质 F*($K_1$, V), 同时存在$\mathcal{F}''\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$K\setminus K_1\subset\cup\mathcal{F}''\subset X\setminus K_1$, 不妨设$\varnothing\notin\mathcal{F}''_{|K\setminus K_1}$, 于是$\mathcal{F}'\cup\mathcal{F}''$具有性质 F*(K, X), 从而有$i\in N$使得$\mathcal{F}'\cup\mathcal{F}''=\mathcal{P}_i$, 所以$y\in P_i\subset\cup\mathcal{F}'\subset V$, 故$\langle P_n\rangle$是y在X中的网. 如果$y\neq x$, 则存在$P\in\mathcal{P}$使得$y\in P\subset V\setminus(K\setminus\{y\})$, 同时存在$\mathcal{G}\in\mathcal{P}^{<\omega}$具有性质F*($K\setminus\{y\}$, $X\setminus\{y\}$), 从而$\mathcal{G}\cup\{P\}$具有性质F*(K, X), 于是存在$j\in N$使得$\mathcal{G}\cup\{P\}=\mathcal{P}_j$, 那么$y\in P_j=P\subset V$, 故$\langle P_n\rangle$是 y 在 X 中的网. 因而, (3)成立.

若更设$\mathcal{P}$关于有限交封闭. 对于每一$n\in N$, 让$\mathcal{F}_n=\{F\in\bigwedge_{i\le n}\mathcal{P}_i:F\cap K\neq\varnothing\}$, 那么每一$\mathcal{F}_{n+1}$加细$\mathcal{F}_n$, 并且易验证$\mathcal{P}$的有限子集列$\{\mathcal{F}_n\}$满足相应的条件(1)~(3). █

设$\mathcal{P}$是空间 X 的网. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, Λ赋予离散拓扑, 令$M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^\omega:\langle P_{\alpha_i}\rangle$构成X中某点$x_\alpha$的网}, 则M是度量空间, 并且对于每一$\alpha\in M$, x_α是唯一确定的, 于是可以定义函数$f:M\to X$使得$f(\alpha)=x_\alpha$. 我们称(f, M, X, $\mathcal{P}$)为 Ponomarev 系. Ponomarev 系是 Ponomarev[1960]研究度量空间开映象时使用的方法的一般化.

引理 1.3.8 设(f, M, X, $\mathcal{P}$)是 Ponomarev 系.

(1) 若对于每一$x\in X$, 存在$\mathcal{P}$的可数子族构成 x 在 X 中的网, 则 f 是映射.

(2) 若$\mathcal{P}$是可数的, 则 M 是可分度量空间.

(3) 若$\mathcal{P}$是点可数的, 则 f 是 s 映射.

(4) 若$\mathcal{P}$是 X 的点可数 cs*网, 则 f 是伪序列覆盖映射和序列商映射.

证明. (1) 显然, f 是满的函数. 另一方面, 对于$\alpha=(\alpha_i)\in M$, $f(\alpha)=x\in U\in\tau(X)$, 存在$m\in N$使得$x\in P_{\alpha_m}\subset U$. 令$V=\{\gamma\in M:\gamma$的第 m 个坐标是$\alpha_m\}$, 则 V 是 M 中含有$\alpha$的开子集且$f(V)\subset P_{\alpha_m}\subset U$, 故 f 是连续的.

(2)是显然的. 若$\mathcal{P}$是点可数的. 对于每一$x\in X$, 让$(\mathcal{P})_x=\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$, 则

$f^{-1}(x) \subset \Gamma^{\omega} \cap M$, 于是 $f^{-1}(x)$是 M 的可分子集, 从而 f 是 s 映射. 故(3)也成立.

(4) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs*网. 我们先证明 f 是伪序列覆盖映射. 设$\{x_n\}$是 X 中收敛于 x 的序列, 让 $K=[x_n]$, 则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足引理 1.3.7 的条件(1)~(3). 对于每一 $n \in N$, 存在 Λ 的有限子集 Γ_n 使得 $\mathcal{P}_n=\{P_\alpha : \alpha \in \Gamma_n\}$. 置 $L=\{(\alpha_i) \in \prod_{n\in N}\Gamma_n : K \cap (\bigcap_{i\in N} P_{\alpha_i}) \neq \emptyset\}$. 那么下述断言(8.1)~(8.3)表明 f 是伪序列覆盖映射.

(8.1) L 是紧子集 $\prod_{n\in N}\Gamma_n$ 的闭子集, 从而 L 是 Λ^{ω} 的紧子集.

设 $\alpha=(\alpha_i) \in \prod_{n\in N}\Gamma_n \setminus L$, 则 $K \cap (\bigcap_{i\in N} P_{\alpha_i}) = \emptyset$, 从而存在 $i_0 \in N$ 使得 $K \cap (\bigcap_{i\le i_0} P_{\alpha_i}) = \emptyset$. 令 $W=\{(\beta_i) \in \prod_{n\in N}\Gamma_n :$ 对于 $i \le i_0$ 有 $\beta_i=\alpha_i\}$, 则 W 是 $\prod_{n\in N}\Gamma_n$ 中含有点 α 的开子集且 $W \cap L=\emptyset$.

(8.2) $L \subset M$ 且 $f(L) \subset K$.

设 $\alpha=(\alpha_i) \in L$. 取定 $y \in K \cap (\bigcap_{i\in N} P_{\alpha_i})$, 则 $\langle P_{\alpha_i}\rangle$ 是 y 在 X 中的网, 于是 $\alpha \in M$ 且 $f(\alpha)=y \in K$, 从而有 $L \subset M$ 且 $f(L) \subset K$.

(8.3) $K \subset f(L)$.

设 $y \in K$. 对于每一 $i \in N$, 存在 $\alpha_i \in \Gamma_i$ 使得 $y \in P_{\alpha_i}$, 令 $\alpha=(\alpha_i)$, 则 $\alpha \in L$ 且由(8.2)所证知 $f(\alpha)=x$, 因此 $K \subset f(L)$.

最后, 证明 f 是序列商映射. 若$\{x_n\}$是 X 中的收敛序列, 则存在 M 的紧子集 K 使得 $f(K)=[x_n]$. 对于每一 $n \in N$, 取定 $z_n \in f^{-1}(x_n) \cap K$, 那么序列$\{z_n\}$存在收敛的子序列$\{z_{n_i}\}$, 从而 f 是序列商映射. ▮

由于度量空间的 σ 局部有限基在子序列覆盖的 s 映射下的象空间具有点可数 cs*网, 所以有

推论 1.3.9(林寿[1995]) 空间 X 是度量空间的伪序列覆盖(序列商, 子序列覆盖)的 s 映象当且仅当 X 具有点可数 cs*网. ▮

1.4 预备知识: 商映射与弱第一可数性

作为预备知识, 本节主要包含两部分的内容. 一是在适当的弱第一可数空间中商映射与紧覆盖映射的关系, 二是介绍几类弱第一可数空间的初步性质.

先叙述序列商映射与闭映射的等价形式.

引理 1.4.1 设 $f:X\rightarrow Y$ 是映射, 那么

(1) f 是序列商映射当且仅当若 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集, 则 F 是 Y 的序列闭集.

(2) f 是闭映射当且仅当对于每一 $f^{-1}(y)$的开邻域 U, 存在 y 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)\subset U$.

证明. (1) 设 f 是序列商映射且 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集. 如果 F 中的序列 S 在 Y 中收敛于点 y, 则存在 X 中收敛于 $x\in f^{-1}(y)$的序列 T 使得 f(T)是 S 的子序列, 于是 $T\subset f^{-1}(F)$, 从而 $x\in f^{-1}(F)$, 因此 $y\in F$, 故 F 是 Y 的序列闭集.

反之, 设 f 不是序列商映射, 则存在 Y 中收敛于某点 y 的序列$\{y_n\}$不满足定义 1.2.3(2)的要求. 不妨设所有的 $y_n\neq y$, 让 $F=\langle y_n\rangle$. 如果$\{x_i\}$是 $f^{-1}(F)$中的序列且在 X 中$\{x_i\}$收敛于 x, 那么 $x\notin f^{-1}(y)$, 于是 $x\in f^{-1}(F)$, 所以 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集, 但是 F 不是 Y 的序列闭集.

(2) 设 f 是闭映射, 对于每一 $f^{-1}(y)$的开邻域 U, 让 $V=Y\setminus f(X\setminus U)$, 那么 V 是 y 的开邻域且 $f^{-1}(V)\subset U$. 反之, 设 F 是 X 的闭子集, 对于每一 $y\in Y\setminus f(F)$, $f^{-1}(y)\subset X\setminus F$, 于是存在 y 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)\subset X\setminus F$, 从而 $V\cap f(F)=\varnothing$, 所以 f(F)是 Y 的闭子集, 故 f 是闭映射. ▍

下述两个引理在我们的证明中将不加说明地被反复使用.

引理 1.4.2(林寿[1995]) 设映射 $f:X\rightarrow Y$.

(1) 若 Y 是 k 空间, f 是紧覆盖映射, 则 f 是商映射.

(2) 若 Y 是序列空间, f 是子序列覆盖映射, 则 f 是商映射.

(3) 若 Y 是 Fréchet 空间, f 是商映射, 则 f 是伪开映射.

(4) 若 X 是序列空间, f 是商映射, 则 f 是序列商映射.

证明. (1) 设 $F\subset Y$ 使得 $f^{-1}(F)$是 X 的闭子集. 对于 Y 的任一紧子集 K, 存在 X 的紧子集 L 使得 f(L)=K, 于是 $F\cap K=f(f^{-1}(F)\cap L)$是 Y 的闭子集, 从而 F 是 Y 的闭子集, 即 f 是商映射.

(2) 设 $F\subset Y$ 使得 $f^{-1}(F)$是 X 的闭子集. 若由 F 中点组成的序列$\{y_n\}$在 Y 中收敛于 y, 则存

在 X 中的紧子集 K 使得 f(K)是$[y_n]$中的子序列. 不妨设 f(K)=$[y_n]$, 那么对于每一 $n\in N$, 存在 $x_n\in K\cap f^{-1}(y_n)$, 设 x 是序列$\{x_n\}$在 X 中的一个聚点, 则$x\in f^{-1}(y)\cap f^{-1}(F)$, 于是 $y\in F$, 从而 F 是 Y 的序列闭集, 故 F 是 Y 的闭子集, 这说明 f 是商映射.

(3) 对于 X 的开子集 V 及 $f^{-1}(y)\subset V$, 若 $y\in Y\setminus int(f(V))$, 则存在 $Y\setminus f(V)$中的序列$\{y_n\}$收敛于 y. 置 $Z=<y_n>$, $F=f^{-1}(Z)$, 那么 $cl(F)\subset F\cup f^{-1}(y)$. 因为 $f^{-1}(y)\subset V$, 且 $V\cap F=\varnothing$, 所以 $f^{-1}(y)\cap cl(F)=\varnothing$, 从而 F 是 X 的闭子集, 于是 $f^{-1}(Y\setminus Z)=X\setminus F$ 是 X 的开子集, 即 $Y\setminus Z$ 是 Y 的开子集, 矛盾. 故 $y\in int(f(V))$, 因此 f 是伪开映射.

(4) 设 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集, 那么 $f^{-1}(F)$是 X 的闭子集, 于是 F 是 Y 的闭子集, 从而 F 是 Y 的序列闭集. 由引理 1.4.1(1), f 是序列商映射. ∎

引理 1.4.3 (1) 商映射保持 k 空间性质.

(2) 商映射保持序列空间性质.

(3) 伪开映射保持 Fréchet 空间性质.

证明. (1) 设 $f:X\to Y$ 是商映射, 其中 X 是 k 空间. 若 A 是 Y 的子集使得对于 Y 的每一紧子集 K, $K\cap A$ 是 Y 的闭子集, 如果 L 是 X 的紧子集, 那么 $f^{-1}(A)\cap L=f^{-1}(A\cap f(L))$是 X 的闭子集, 于是 $f^{-1}(A)$是 X 的闭子集, 从而 A 是 Y 的闭子集, 故 Y 是 k 空间.

(2) 设 $f:X\to Y$ 是商映射, 其中 X 是序列空间. 若 U 是 Y 的序列开集, 则 $f^{-1}(U)$是 X 的序列开集, 于是 $f^{-1}(U)$是 X 的开子集, 从而 U 是 Y 的开子集, 这说明 Y 是序列空间.

(3) 设 $f:X\to Y$ 是伪开映射, 其中 X 是 Fréchet 空间. 设 $y\in cl(A)\subset Y$, 如果 $f^{-1}(y)\cap cl(f^{-1}(A))=\varnothing$, 那么 $y\in int(f(X\setminus cl(f^{-1}(A))))\subset Y\setminus cl(A)$, 矛盾, 于是有 $x\in f^{-1}(y)\cap cl(f^{-1}(A))$, 从而存在 $f^{-1}(A)$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 因此 A 中的序列$\{f(x_n)\}$收敛于 y, 所以 Y 是 Fréchet 空间. ∎

引理 1.4.4 设 $f:Z\to Y$. 让 $g=id_X\times f:X\times Z\to X\times Y$, 那么

(1) 若 X 是局部紧空间, f 是商映射, 则 g 是商映射.

(2) 若 f 是完备映射, 则 g 是完备映射.

证明. (1) 对于 $X\times Y$ 的子集 W, 设 $g^{-1}(W)$是 $X\times Z$ 的开子集, 任取点$(x, y)\in W$, 对于

$z\in f^{-1}(y)$, 选取 x 在 X 中的开邻域 U 使得 cl(U)是 X 的紧子集且 $cl(U)\times\{z\}\subset g^{-1}(W)$, 那么 $cl(U)\times f^{-1}(y)\subset g^{-1}(W)$. 令 $V=\{\alpha\in Y : cl(U)\times f^{-1}(\alpha)\subset g^{-1}(W)\}$, 则$(x, y)\in U\times V\subset W$. 往证 V 是 Y 的开子集. 由于 cl(U)是紧空间, 于是$\pi_2:cl(U)\times Z\to Z$ 是闭映射, 从而 $f^{-1}(V)=\{z\in Z : cl(U)\times f^{-1}f(z)\subset g^{-1}(W)\}=\{z\in Z : cl(U)\times\{z\}\subset g^{-1}(W)\}=Z\setminus\pi_2(cl(U)\times(Z\setminus g^{-1}(W)))$是 Z 的开子集, 所以 V 是 Y 的开子集, 因此 W 是 X×Y 的开子集, 故 f 是商映射.

(2) 对于每一$(x, y)\in X\times Y$, $g^{-1}(x, y)=\{x\}\times f^{-1}(y)$是 X×Z 的紧子集, 所以 g 是紧映射. 另一方面, 对于 X×Z 中每一含 $g^{-1}(x, y)$的开子集 G, 分别存在 X, Z 的开子集 U 和 V 使得$\{x\}\times f^{-1}(y)\subset U\times V\subset G$. 由于 f 是闭映射, 存在 y 在 Y 中的开邻域 H 使得 $f^{-1}(H)\subset V$, 于是 U×H 是(x, y)的开邻域且 $g^{-1}(U\times H)=U\times f^{-1}(H)\subset G$, 所以 g 是闭映射. 因此, g 是完备映射. ▮

引理 1.4.5 (1) 局部紧空间与 k 空间之积空间是 k 空间.

(2) 设 $\prod_{i\in N} X_i\neq\varnothing$, 则 $\prod_{i\in N} X_i$ 是局部k_ω空间当且仅当所有的X_i是局部k_ω空间, 且至多有限个 X_i 不是紧空间.

证明. (1) 设 X 是局部紧空间, Y 是 k 空间. 让 $Z=\oplus\{K\subset Y : K$ 是 Y 的紧子集$\}$, $f:Z\to Y$ 是自然映射, 则 Z 是局部紧空间且 f 是商映射. 让 $g=id_X\times f:X\times Z\to X\times Y$, 由引理 1.4.4(1), g 是商映射. 由于 X×Z 是局部紧空间, 于是 X×Z 是 k 空间, 从而 X×Y 是 k 空间.

(2) 若 $\prod_{i\in N} X_i$ 是局部 k_ω 空间, 由于每一 X_i 同胚于 $\prod_{i\in N} X_i$ 的闭子空间, 于是 X_i 是局部 k_ω空间. 因为$\prod_{i\in N} X_i$ 是局部 k_ω空间, 存在 $n\in N$ 使得$\prod_{i\geq n} X_i$ 是 k_ω 空间. 若存在无限个 $i\geq n$ 使得X_i不是紧空间, 那么X_i不是可数紧空间, 于是X_i含有闭子空间同胚于N, 从而N^ω是k_ω空间, 所以 N^ω是σ紧空间. 记 $N^\omega=\bigcup_{n\in N} K_n$, 其中每一 K_n 是 N^ω 的紧子集, 于是 K_n 在第 n 个坐标空间上的投影$\pi_n(K_n)$是有限集, 从而存在 $x\in N^\omega$ 使得每一$\pi_n(x)\in N\setminus\pi_n(K_n)$, 因此 $x\notin\bigcup_{n\in N} K_n$, 矛盾. 故至多有限个 X_i 不是紧空间.

反之, 设所有的 X_i 是局部 k_ω 空间, 并且至多只有有限个 X_i 不是紧空间. 为证明 $\prod_{i\in N} X_i$ 是局部 k_ω 空间, 只须证若 X, Y 是 k_ω 空间, 则 X×Y 是 k_ω 空间. 设 X, Y 分别关于紧子集族$\langle X_n\rangle$

和$\langle Y_n\rangle$具有弱拓扑. 不妨设每一$X_n \subset X_{n+1}$, $Y_n \subset Y_{n+1}$, 往证 $X\times Y$ 关于紧子集族$<X_n \times Y_n>$具有弱拓扑. 对于$X\times Y$的子集 W, 设每一$W\cap(X_n\times Y_n)$是$X_n\times Y_n$的开子集, 任取$(x, y)\in W$, 不妨设$x\in X_1$, $y\in Y_1$, 对于每一$n\in N$, 由归纳法, 可构造 x 在X_n中的开邻域V_n, y 在Y_n中的开邻域 U_n 满足 $cl(V_n)\subset V_{n+1}$, $cl(U_n)\subset U_{n+1}$ 且 $cl(V_n)\times cl(U_n)\subset W$. 令 $V=\bigcup_{n\in N} V_n$, $U=\bigcup_{n\in N} U_n$, 那么 V 与 U 分别是 x 和 y 在 X 和 Y 中的开邻域且 $V\times U\subset W$. 因而 W 是 $X\times Y$ 的开子集, 故 $X\times Y$ 关于$<X_n\times Y_n>$具有弱拓扑, 所以 $X\times Y$ 是 k_ω 空间. ▌

引理 1.4.6　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族, 那么

(1) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的弱基, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的 sn 网.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是序列空间 X 的 sn 网, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的弱基.

证明. (1) 设 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是空间 X 的弱基, 我们只须证明每一 $\mathcal{P}_x$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域. 对于 $P\in\mathcal{P}_x$, 若存在 $X\setminus P$ 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 令 $U=X\setminus<x_n>$, 则 U 不是 X 的开子集. 另一方面, 对于每一$z\in U$, 若$z=x$, 则$P\subset U$, 若$z\neq x$, 则$z\in X\setminus[x_n]$, 于是有$Q\in\mathcal{P}_z$使得$Q\subset X\setminus[x_n]$, 从而 U 是 X 的开子集, 矛盾. 这表明 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

(2) 设$\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$是序列空间 X 的 sn 网. 若$G\subset X$使得对于每一$x\in G$存在$P\in\mathcal{P}_x$, 有$P\subset G$, 那么 G 是 G 中每一点的序列邻域, 于是 G 是 X 的序列开集, 从而 G 是 X 的开子集, 故每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的弱邻域基, 所以 $\mathcal{P}$ 是 X 的弱基. ▌

由引理 1.4.6 易验证, 对于空间 X 的覆盖, 基$\Rightarrow$弱基$\Rightarrow$sn 网$\Rightarrow$cs 网$\Rightarrow$cs*网. gf 可数(第一可数)空间等价于 snf 可数(sof 可数)的序列空间.

引理 1.4.7　空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 的每一点的序列邻域是该点的邻域.

证明. 设空间 X 是 Fréchet 空间, U 是 X 中某点 x 的序列邻域, 若 $x\in X\setminus int(U)$, 则存在 $X\setminus U$ 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 这与 U 是 x 的序列邻域相矛盾, 所以 U 是 x 在 X 中的邻域. 反之, 设 X 的每一点的序列邻域是该点在 X 中的邻域, 若 X 不是 Fréchet 空间, 则存在 X 的子集 A 和 $x\in cl(A)$使得 A 中没有序列收敛于 x, 于是 $X\setminus A$ 是 x 的序列邻域, 从而 $X\setminus A$ 是 x 在 X 中的邻域, 即 $x\in int(X\setminus A)=X\setminus cl(A)$, 矛盾, 故 X 是 Fréchet 空间. ▌

推论 1.4.8 (1) 空间 X 是第一可数空间当且仅当 X 是 snf 可数的 Fréchet 空间.

(2) 空间 X 是半度量空间当且仅当 X 是对称度量的 Fréchet 空间. ▮

为进一步说明序列空间的性质, 我们定义序列闭包拓扑空间.

定义 1.4.9(Franklin[1967]) 每一空间(X, τ)可重新定义一拓扑 σ_τ : O$\in\sigma_\tau$ 当且仅当 O 是(X, τ)的序列开集. 空间(X, σ_τ)称为(X, τ)的序列闭包拓扑空间, 简记为σ X.

显然, σ X 是序列空间, X 和σ X 有相同的收敛序列, X 与σ X 中的同一点有相同的序列邻域. 对于空间 X 及 A$\subset$X, 记

cl_σ(A)=$\mathrm{cl}_{\sigma X}$(A).

cl_s(A)={x$\in$X : 存在 A 中的序列收敛于 x}.

int_s(A)=X$\setminus\mathrm{cl}_s$(X$\setminus$A).

引理 1.4.10 对于空间 X 及 A$\subset$X, A 是 x 在 X 中的序列邻域当且仅当 x$\in\mathrm{int}_s$(A).

证明. 设 A 是 x 在 X 中的序列邻域, 若 x$\notin\mathrm{int}_s$(A), 那么 x$\in\mathrm{cl}_s$(X$\setminus$A), 于是存在 X$\setminus$A 中的序列收敛于 x, 这与 A 的假设相矛盾. 反之, 设 A 不是 x 在 X 中的序列邻域, 那么存在 X$\setminus$A 中的序列收敛于 x, 从而 x$\in\mathrm{cl}_s$(X$\setminus$A), 故 x$\notin\mathrm{int}_s$(A). ▮

引理 1.4.11 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) σ X 是 Fréchet 空间.

(2) 对于每一 A$\subset$X, cl_σ(A)=cl_s(A).

(3) 对于每一 A$\subset$X, cl_s(A)是 X 的序列闭集.

(4) 对于每一 A$\subset$X, int_s(A)是 X 的序列开集.

证明. 由定义 1.4.9, (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4). (4)$\Rightarrow$(1). 设 A 是点 x 在σ X 中的序列邻域, 则 A 是 x 在 X 中的序列邻域, 于是 x$\in\mathrm{int}_s$(A), 而 int_s(A)是σ X 的开子集. 由引理 1.4.7, σ X 是 Fréchet 空间. ▮

引理 1.4.12 空间 X 是强 Fréchet 空间当且仅当 X 是 Fréchet 的α_4空间.

证明. 显然，强 Fréchet 空间是Fréchet 的α_4空间. 反之，若 X 是 Fréchet 的α_4空间，设$\{A_n\}$是 X 中递减的集列$\{A_n\}$且$x\in\bigcap_{n\in N}cl(A_n)$，对于每一$n\in N$，存在由$A_n$中点组成的序列$\{x_{nm}\}_m$收敛于 x，不妨设 x 及$x_{nm}$的各项是两两互不相同的，令$F=\{x\}\cup\{x_{nm}: n, m\in N\}$，则 F 是 X 在 x 的扇. 因为 X 是$\alpha_4$空间，于是 F 有对角收敛于 x，又因为集列$\{A_n\}$是递减的，存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得每一$x_n\in A_n$，从而 X 是强 Fréchet 空间. ∎

定理 1.4.13 对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) σX 是 gf 可数空间.

(2) X 是 snf 可数空间.

(3) X 是 csf 可数的α_4空间.

证明. (1)$\Rightarrow$(3)是显然的.

(3)$\Rightarrow$(2). 设 X 是 csf 可数的α_4空间. 对于每一$x\in X$，让$\mathcal{P}_x$是 x 在 X 中可数的 cs 网. 对于任一$x\in U\in\tau$，置

$$\mathcal{F}_x=\{\cup\mathcal{P}'_x : \mathcal{P}'_x\in\mathcal{P}_x^{<\omega}\text{且}\cup\mathcal{P}'_x\text{是 x 在 X 中的序列邻域}\}.$$

则$\mathcal{F}_x$是可数的. 如果$\mathcal{F}_x$不是 x 在 X 中的网，那么存在 X 的开子集 G 使得$x\in G$且对于每一$F\in\mathcal{F}_x$有$F\not\subset G$. 记

$$\{P\in\mathcal{P}_x : P\subset G\}=\langle P_i\rangle, F_n=\bigcup_{i\le n}P_i, n\in N.$$

则每一F_n不是 x 在 X 中的序列邻域. 因为$\mathcal{P}_x$是 x 在 X 中的 cs 网，对于每一$i\in N$，存在 X 中收敛于 x 的序列T_i和$n_i\in N$使得$T_i\subset P_{n_{i+1}}\setminus F_{n_i}$且$n_{i+1}>n_i$. 置$T=\{x\}\cup(\bigcup_{i\in N}T_i)$. 那么 T 是 x 在 X 的扇. 因为 X 是α_4空间, T 有对角$\{x_k\}$收敛于 x，于是存在$i\in N$使得P_i含有$\{x_k\}$的子序列$\{x_{k_m}\}$，从而存在$m, j\in N$使得$j\ge i$且$x_{k_m}\in T_j$，因此, $x_{k_m}\in P_i\cap(X\setminus F_{n_j})=\varnothing$，矛盾. 故$\mathcal{F}_x$中的元的有限交的全体是 x 在 X 中的可数的 sn 网，从而 X 是 snf 可数空间.

(2)$\Rightarrow$(1). 设 X 是 snf 可数空间. 对于每一$x\in X$，设$\{P_n\}$是 X 在 x 的递减的 sn 网. 显然，每一P_n是σX 在 x 的序列邻域. 若 G 是 x 在 X 中的序列邻域，如果每一$P_n\not\subset G$，则存在序列$\{p_n\}$

使得每一$p_n \in P_n \setminus G$，于是$\{p_n\}$在X中收敛于x，从而$\{p_n\}$是终于G的，矛盾. 因此，存在$n\in N$使得$P_n \subset G$. 这说明$\{P_n\}$是σX在x的sn网，所以σX是snf可数的序列空间，即σX是gf可数空间. ▉

下面介绍正则化拓扑空间.

定义 1.4.14(Nogura，Shibakov[1995]) 对于空间(X, τ)及$x_0 \in X$可重新定义拓扑τ^*如下：对于$x \neq x_0$，$\{x\} \in \tau^*$，x_0的邻域基取为原拓扑τ在X中的邻域基. 称空间(X, τ^*)为(X, τ)在x_0的正则化拓扑空间.

引理 1.4.15 设空间(X, τ^*)是空间(X, τ)在x_0的正则化拓扑空间，那么

(1) (X, τ^*)是正则空间.

(2) 若(X, τ)是α_4空间，则(X, τ^*)是α_4空间.

(3) 若(X, τ)是强Fréchet空间，则(X, τ^*)是强Fréchet空间.

证明. 易验证，(X, τ^*)是正则空间.

若(X, τ)是α_4空间，如果$x \in X$且F是(X, τ^*)在x的扇，那么$x=x_0$. 由于τ与τ^*在x_0有相同的收敛序列，于是F在(X, τ^*)中有对角收敛于x，故(X, τ^*)是α_4空间.

若(X, τ)是强Fréchet空间，如果$\{A_n\}$是X中递减的子集列且$x \in \bigcap_{n\in N} cl_{\tau^*}(A_n)$，若$x \neq x_0$，则$x \in \bigcap_{n\in N} A_n$，取每一$x_n = x \in A_n$，这时序列$\{x_n\}$在$(X, \tau^*)$中收敛于x；若$x=x_0$，则$x \in \bigcap_{n\in N} cl_{\tau}(A_n)$，于是存在$x_n \in A_n$使得序列$\{x_n\}$在$(X, \tau)$中收敛于x，从而$\{x_n\}$在$(X, \tau^*)$中也收敛于x. 所以$(X, \tau^*)$是强Fréchet空间. ▉

1.5 例

本节例举几个典型的例子说明一些空间类的不蕴含关系，这些例子的大部分已在林寿[1995]介绍过. 为了叙述的简明起见，我们引用了后几章中的一些结果. 对于完全正则空间X，βX是X的Stone-Čech紧化. 当X是离散空间时，βX不存在非平凡的收敛序列(Engelking[1977]).

例 1.5.1 林寿[1995]的例1.8.6和例2.9.26: Arens空间S_2.

(1) S_2是没有对角的梳, S_2是具有可数弱基的正则空间.

(2) S_2不是Fréchet空间.

(3) S_2是可分度量空间的1序列覆盖的商紧映象, S_ω是S_2的完备映象. ∎

例 1.5.2 林寿[1995]的例1.8.7、命题2.7.21和命题3.8.22: 扇空间S_α.

(1) S_α是度量空间的闭映射, 于是S_α是Fréchet空间, 但是S_α不是强Fréchet空间, 不是snf可数空间.

(2) S_ω是没有对角的扇, S_ω是$\aleph_0$空间.

(3) S_{ω_1}不具有点可数cs*网.

(4) $(S_{\omega_1})^2$不是k空间 ∎

例 1.5.3 林寿[1995]的例1.8.4: Gillman-Jerison空间$\psi(D)$.

设D是无限集. D的可数无限子集的族$\mathcal{A}$称为几乎互不相交的, 若$\mathcal{A}$中任两不同元之交为有限集. 设$\mathcal{A}$是D的极大几乎互不相交族, 则$\mathcal{A}$是不可数的. 否则, 记$\mathcal{A}=\langle A_i\rangle$, 取D的可数无限子集E使得对于每一$i\in N$有$|E\cap A_i|=1$, 那么$E\notin\mathcal{A}$且$\mathcal{A}\cup\{E\}$是几乎互不相交族, 矛盾. 置$\psi(D)=\mathcal{A}\cup D$, 具有下述拓扑的空间$\psi(D)$称为Gillman-Jerison空间: D中的点取为$\psi(D)$的孤立点, 而对于$A\in\mathcal{A}$, A在$\psi(D)$中的邻域基取为$\{\{A\}\cup(A\setminus F):F\in A^{<\omega}\}$, 则$\psi(D)$是局部紧空间, 而$\psi(N)$是可展空间.

让$f:\psi(N)\to S_1$使得$f(\mathcal{A})=\{0\}$且$f(n)=1/n$, 那么f是闭映射. 若f是紧覆盖映射, 则存在$\psi(N)$的紧子集K使得$f(K)=S_1$, 于是$N\subset K$, 从而$K=\psi(N)$, 矛盾. 故f不是紧覆盖映射.

下面通过$\psi(N)$构造两个新的空间. 让$X=\psi(N)\cup\{a\}$是$\psi(N)$的单点紧化, 则X是紧的序列空间, 且不含有子空间同胚于S_2和S_ω. 任取$\mathcal{A}$的无限子集$\mathcal{A}'=\langle A_n\rangle$, 由于在$\psi(N)$中$\mathcal{A}$是闭离散子集, 所以序列$\{A_n\}$在X中收敛于a. 对于每一$n\in N$, 置$A_n=\langle a_{nm}\rangle$, 那么在$\psi(N)$中序列$\{a_{nm}\}_m$收敛于$A_n$. 让$M=\{a\}\cup\mathcal{A}'\cup\{a_{nm}:n,m\in N\}$, 则M具有可数的sn网. 因为$\{a_{nm}\}$的任一子序列在X中都不收敛于a, 所以$\sigma M$同胚于$S_2$.

取 Y=X/$\mathcal{A}$, 让 f:X$\to$Y 是自然商映射, 那么 Y 是紧的序列空间, 且不含有子空间同胚于 S_2 和 S_ω. 令 T=f(M), 那么 T 有可数的 cs 网且σ T 同胚于 S_ω. ▌

例 1.5.4 林寿[1995]的例 2.8.16: 存在局部紧的度量空间 M 和紧覆盖, 1 序列覆盖, 商, 有限到一映射 f:M$\to$X 使得

(1) X 是可分的正则空间.

(2) X 具有点可数弱基.

(3) X 不是亚 Lindelöf 空间.

(4) X 不具有紧可数 k 网.

定义 X=I$\times S_1$, Y=I$\times$ ($S_1 \setminus \{0\}$), 集合 X 赋予下述拓扑: Y 作为 X 的子空间具有通常的欧氏拓扑. 对于(t, 0)$\in$X 的邻域基元具有形式: $\{(t, 0)\}\cup(\bigcup_{k\geq n}V(t, k))$, n$\in$N, 其中 V(t, k)是点(t, 1/k)在欧氏子空间 I$\times$$\{1/k\}$中的开邻域. 置 M=$(\oplus_{n\in N}$ I$\times\{1/n\})\oplus(\oplus_{t\in \mathrm{I}}\{t\}\times S_1)$, 那么 M 是局部紧的度量空间, 让 f 是从 M 到 X 上的自然映射, 则 f 是紧覆盖的商有限到一映射. 显然, X 是可分的正则空间. 易验证, X 具有点可数弱基. 由于可分的亚 Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间, 而 X 不是 Lindelöf 空间, 所以 X 不是亚 Lindelöf 空间.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的紧可数 k 网. 置 $\mathcal{F}$=$\{\{(t, 0)\} : t\in I\}\cup\{P\cap Y : P\in\mathcal{P}\}$. 由于 I$\times\{0\}$是 X 的闭离散子空间, 于是 $\mathcal{F}$ 是 X 的 k 网. 而 Y 是 X 的σ紧子空间, 所以$\{P\cap Y : P\in\mathcal{P}\}$是可数的, 因此 $\mathcal{F}$ 是星可数的. 由推论 5.2.4, X 是 Lindelöf 空间, 矛盾. 故 X 不具有紧可数 k 网. ▌

空间 X 称为可数亚紧空间, 若 X 的每一可数的开覆盖存在点有限的开加细. 我们引用 Ishikawa[1955]的可数亚紧空间的下述刻画: 若$\{C_n\}$是空间 X 的递减的闭子集列且$\bigcap_{n\in N}C_n=\varnothing$, 则存在 X 的开子集列$\{U_n\}$使得每一 $C_n\subset U_n$ 且$\bigcap_{n\in N}U_n=\varnothing$

例 1.5.5 Sakai[1997b]的例 2: 存在局部可数的正则空间 X 使得 X 的所有紧子集是有限集, 但是 X 不是可数亚紧空间.

设 D 是基数为 2^ω 的子集, 赋予 D 离散拓扑. 让$\{P_\alpha : \alpha<2^\omega\}$是 D 的可数无限子集的几乎互不相交族使得对于 D 的每一不可数子集 P 存在$\alpha<2^\omega$有 $P_\alpha\subset$P. 这种集族的存在可见 Blacar, Simon[1989]的例 4.2. 对于每一$\alpha<2^\omega$, 让<$P_{\alpha n}$>是 P_α 的无限子集的互不相交族. 令 $\mathcal{P}$=$\{P_{\alpha n}$:

$\alpha<2^{\omega}$, $n\in N\}$. 对于每一$\alpha<2^{\omega}$和 $n\in N$, 记 $P^{*}_{\alpha n}=cl_{\beta D}P_{\alpha n}\setminus P_{\alpha n}$, 取定点 $p_{\alpha n}\in P^{*}_{\alpha n}$. 让 $X=D\cup\{p_{\alpha n}:\alpha<2^{\omega}, n\in N\}$, 集合 X 被赋予$\beta D$的子空间拓扑, 则 X 是正则空间. 因为$\mathcal{P}$是几乎互不相交的, $X\setminus D$ 是 X 的闭离散子空间. 易验证, X 是局部可数空间且 X 的每一紧子集是有限的.

我们证明 X 不是可数亚紧空间. 对于每一$n\in N$, 让$C_n=\{p_{\alpha k}:\alpha<2^{\omega}, k\geq n\}$, 那么每一$C_n$是 X 的闭子集且$\bigcap_{n\in N}C_n=\varnothing$. 若存在开集$U_n\supset C_n$使得$\bigcap_{n\in N}U_n=\varnothing$, 因为 D 是不可数的, 存在 $n\in N$ 使得 $D\setminus U_n$是不可数的, 于是存在$\alpha<2^{\omega}$使得 $P_{\alpha}\subset D\setminus U_n$, 从而 $p_{\alpha n}\in C_n\cap cl(D\setminus U_n)=\varnothing$, 矛盾. 故 X 不是可数亚紧空间. ∎

例 1.5.6 林寿[1995]的例 2.9.27: 存在局部紧度量空间 Z 以及紧覆盖的商有限到一映射 $f:Z\to X$, 完备映射 $g:X\to Y$ 具有下述性质

(1) X 是具有点可数闭 k 网的正则空间.

(2) X 不具有点可数 cs 网.

(3) X 不是局部可分空间.

(4) Y 含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

对于 $x\in I$, 设S_x同胚于S_1, 置 $Z=I\oplus(\oplus_{x\in I}S_x)$, 则 Z 是局部紧的度量空间. 让 X 是将每一$x\in I$ 与S_x的极限点贴合成一点得到的商空间, 用 f 表示这个商映射, 则 f 是有限到一的紧覆盖映射. 将 X 的紧子集 I 贴合成一点得到的商空间记为 Y, 用 g 表示这个商映射, 则 g 是完备映射. 这时 X 是具有点可数闭 k 网的正则空间, 但是 X 不具有点可数 cs 网, X 不是局部可分空间. Y 含有闭子空间同胚于S_{ω_1}.

我们介绍刘川和 Tanaka[1996a]构造的上述空间 X 的一般化. 设 M 是度量空间. 对于每一$x\in M$, 让T_x是收敛于 x 的序列使得$T_x\cap M=\varnothing$且这些T_x是两两互不相交的. 令$S_x=T_x\cup\{x\}$. 置 $X_M=M\cup(\bigcup_{x\in M}T_x)$并且 X_M关于$\{M\}\cup\{S_x:x\in M\}$具有弱拓扑, 于是 X_M由空间族$\{M\cup T_x:x\in M\}$控制, X_M是度量空间$M\oplus(\oplus_{x\in M}S_x)$的商, 有限到一映象. ∎

例 1.5.7 林寿[1995]的例 1.8.8: Michael 空间.

取定 $p\in\beta N\setminus N$，令 $X=N\cup\{p\}$. 集合 X 赋予 βN 的子空间拓扑称为 Michael 空间. 显然, X 是所有紧子集为有限集的正则空间, 于是 X 是 $\aleph_0$ 空间, 但是 X 不是 k 空间. █

例 1.5.8 林寿[1999b]的例 4.3 和 Steen, Seebach[1978]的例 78: 半园盘拓扑空间 X.

(1) X 不是正则空间.

(2) X 是可展空间.

(3) X 不是亚 Lindelöf 空间.

(4) X 不具有点可数的 cs*网.

(5) X 具有局部可数且 σ 离散的 k 网.

记 τ 是平面 R^2 的欧氏拓扑, $S=\{(x, y) : x, y\in R, y>0\}$, $L=\{(x, 0) : x\in R\}$ 且 $X=S\cup L$. 在 X 上赋予半园盘拓扑 $\tau^*=\tau_{|X}\cup\{\{x\}\cup(S\cap U) : x\in L, U\in\tau\}$, 称 (X, τ^*) 为半园盘拓扑空间, 则 X 是 T_2, 非正则, 可分, 非 Lindelöf, 第一可数空间(Steen, Seebach[1978]). 利用 R^2 的球形邻域易验证 X 是可展空间. 由于可分的亚 Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间, 所以 X 不是亚 Lindelöf 空间, 从而 X 不具有点可数基, 由推论 2.1.7(1)知 X 不具有点可数的 cs*网. 所以(1)~(4)成立.

置 $\mathcal{P}=\{\{p\} : p\in L\}\cup\{B(q, 1/n)\cap S : q$ 的两个坐标均是有理数, $n\in N\}$. 由于 L 是 X 的闭离散子空间, 所以 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数且 σ 离散的集族, 往证它是 X 的 k 网. 由引理 2.1.6, 只须证 $\mathcal{P}$ 满足: 若 X 中的序列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z\in U\in\tau^*$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $P\subset U$ 且 P 含有 $\{z_n\}$ 的无限项. 不妨设所有的 $z_n\in S$, 则在欧氏拓扑中序列 $\{z_n\}$ 仍收敛于 z, 于是存在两个坐标均是有理数的点 q 和 $k, m\in N$ 使得 $\{z_n : n\geq k\}\subset B(q, 1/m)\cap S\subset U$. 因此 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网. 故 X 具有局部可数且 σ 离散的 k 网, 所以(5)成立. █

第二章　关于点可数覆盖

早在 20 世纪 20 年代 Alexandroff 和 Urysohn(Arhangel’skii[1997]; Arhangel’skii, Tikhomirnov[1998])就证明了如果正则空间 X 具有由可分度量空间组成的点可数开覆盖, 则 X 是度量空间. 1960 年 Ponomarev[1960]用度量空间的开 s 映象刻画了具有点可数基的空间, 为 Alexandroff 的空间分类思想奠定了基础, 伴随着亚 Lindelöf 等覆盖性质的进一步深入探索(Burke[1984]), 引导了一批一般拓扑学工作者对于空间中点可数集族的浓厚兴趣. 对于由点可数覆盖所确定的广义度量空间理论较为系统研究的 3 篇重要论文是 1976 年 Burke 和 Michael[1976]的“On certain point-countable covers”, 1984 年 Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]的“Spaces determined by point-countable covers”以及 1987 年 Tanaka[1987b]的“Point-countable covers and k-networks”. Tanaka[1989]的论文是关于点可数覆盖与度量空间 s 映象的第一篇较详细的综述报告(含有完整的证明). 这些论文的大部分结果已写入林寿[1995]的《广义度量空间与映射》. 现在, 点可数覆盖理论的研究依然是拓扑学中较活跃的课题之一, 包含函数空间(Dow, Junnila, Pelant[1997])、拓扑群(Arhangel’skii[1998])和广义序空间(刘川, Sakai, Tanaka[2002])等在内的具有确定的点可数覆盖空间的度量化问题依然吸引着一些一般拓扑学名家的关注(Arhangel’skii[1997]; 林寿, 燕鹏飞[1998]).

本章将围绕具有点可数 k 网的空间、具有点可数序列网的空间、具有点可数 cs*网的空间、具有点可数 cs 网的空间与具有点可数 cfp 网的空间中的一些与度量空间的 s 映象相关的问题阐述点可数覆盖的理论. 我们应用 Miščenko[1962]和 Ponomarev[1960]处理点可数覆盖与度量空间开 s 映象的技巧, 发挥 Franklin[1967]定义的序列闭包拓扑“既有稳定的收敛序列又可回避空间对弱第一可数性的要求”这一优点, 介绍了 Arhangel’skii、Hoshina、Michael、Nagami、刘川和 Tanaka 等提出的几个问题(见问题 2.1.1, 问题 2.2.1, 问题 2.3.2, 问题 2.4.1 和问题 2.5.1)的解决情况与研究进展, 初步建立了度量空间的序列覆盖 s 映射与紧覆盖 s 映射的研究框架.

2.1　wcs*网与基

在由点可数覆盖所确定的广义度量空间类中, 具有点可数 k 网的空间所具有的魅力仅次于具有点可数基的空间. 研究 M 空间的度量化(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984])、度量空间的 s 映象(Tanaka[1987b])与完备逆象(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984])、乘积空间的弱第一可数性(Nogura, Shibakov[1995]; Shibakov[1995a]; Tanaka[1997]), CW 复形(刘川, Tanaka[1996c]; Tanaka[1992a])、

函数空间(McCoy, Ntantu[1988])、广义序空间(刘川, Sakai, Tanaka[2002])、具广义度量条件的拓扑群的度量化(刘川, Sakai, Tanaka[2002]; Shibakov[1998a])及具有点可数基空间的性质(林寿, Tanaka[1994])等均与具有点可数 k 网的空间有关. 由此可见, 具有点可数 k 网的空间是较典型的广义度量空间类(Tanaka[1999]).

具有点可数k网空间研究的主旋律之一是它与由点可数覆盖确定的空间之间的转化, 适当的弱第一可数性是一个合适的媒介. 刘川和 Tanaka 提出

问题 2.1.1 (1)(刘川, Tanaka[1998b]; Tanaka[1994]) 若具有点可数k网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 那么 X 是否具有点可数基?

(2)(Tanaka[1987a]) 若度量空间的商 s 映象 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 那么 X 是否具有点可数基?

(3)(Tanaka[1994]) 若具有点可数 cs 网的序列空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω, 那么 X 是否具有点可数弱基?

(4)(刘川, Tanaka[1996a]) 若具有 σ 点有限 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω, 那么 X 是否是 gf 可数空间?

问题 2.1.1 的实质是在具有点可数 k 网的空间中 S_2, S_ω 与弱第一可数性的关系. 1977 年 Franklin 和 Thomas[1977b]证明了具有可度量"块"的 k_ω 空间是可度量空间当且仅当它不含有子空间同胚于 S_2 和 S_ω; 1983 年 Tanaka[1983]证明了局部可分度量空间的正则的商 s 映象是可度量空间当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω; 1987 年 Tanaka[1987a]证明了在假设(CH)下度量空间的正则的商紧映象具有点可数基当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 (CH 表示连续统假设, 即 $\omega_1 = 2^\omega$); 1994 年刘川和戴牧民[1994]证明了对于具有点可数闭 k 网的正则的 k 空间 X, 若 X 具有点 G_δ 性质且不含有闭子空间同胚于 S_ω, 则 X 是 gf 可数空间; 1995 年 Nogura 和 Shibakov[1995]证明了对于具有点可数k网的 Fréchet 空间 X, 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω, 则 X 是第一可数空间. 受这些工作的引导, 本节侧重于介绍在具有点可数覆盖空间中如何建立 S_2, S_ω 与弱第一可数性的精确关系, 深化了已有的一系列结果, 解决了 2.1.1 中的全部问题.

先引进几个概念与记号. 与 k 网和 cs*网相关的概念是下述的 wcs*网和条件(A)和(B). 对于空间 X 的子集族 $\mathscr{F}$ 和 $A\subset X$, $\mathscr{F}$ 称为 A 的序列邻域, 如果 $A\subset \mathrm{int}_s(\cup\mathscr{F})$, 由引理 1.4.10, 即 $\cup\mathscr{F}$ 是 A 中每一点在 X 中的序列邻域.

定义 2.1.2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1)(林寿, Tanaka[1994]) $\mathscr{P}$ 是 X 的 wcs*网, 如果 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x 的序列且 $x\in U\in\tau$, 则存在 $P\in\mathscr{P}$ 和 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得 $\langle x_{n_i}\rangle\subset P\subset U$.

(2)(燕鹏飞, 林寿[1999a]) 称 $\mathscr{P}$ 具有(A), 如果 $x\in U\in\tau$, 则存在 $\mathscr{F}\in\mathscr{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathscr{F})\subset\cup\mathscr{F}\subset U$.

(3)(燕鹏飞, 林寿[1999a]) 称 $\mathscr{P}$ 具有(B), 如果 $x\in U\in\tau$, 则存在 $\mathscr{F}\in\mathscr{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathscr{F})\subset\cup\mathscr{F}\subset U$, 且 $x\in\cap\mathscr{F}$.

术语 wcs*网的更早描述是在 Tanaka[1987b]中记为条件(C_2). 而条件(A)和(B)的引入源于如下的 Burke-Michael[1976]条件: X 有点可数覆盖 $\mathscr{P}$ 使得如果 $x\in U\in\tau$, 则存在 $\mathscr{F}\in\mathscr{P}^{<\omega}$ 有 $x\in \mathrm{int}(\cup\mathscr{F})\subset\cup\mathscr{F}\subset U$ 且 $x\in\cap\mathscr{F}$. 1969 年 Filippov[1969]通过极其复杂的构造证明了"可数双商 s 映射保持具有点可数基的空间", 1972 年 Burke 和 Michael[1972]却以另一种方式较容易地证明了"可数双商 s 映射保持具有点可数基的空间". 其精彩与重要之处在于 Burke 和 Michael 借助上述的点可数覆盖性质获得了点可数基空间的一个等价刻画, 利用点可数基空间在可数双商 s 映射下的象空间具有这种点可数覆盖性质得到了 Filippov 定理的优美证明. 虽然 Burke-Michael 条件放低了对于空间中点可数覆盖中元素开集条件的要求, 但在讨论映射定理时若缺少了空间中适当的弱第一可数条件, 要达到 Burke-Michael 条件中有限并的开邻域性质也是有困难的. 另一方面, Burke-Michael 条件中的集族性质与问题 2.1.1 中的集族性质"k 网"或"cs*网"都蕴含了"wcs*网"这一集族性质. 本节旨在发展 wcs*网的理论, 试图利用更一般的"序列邻域"来代替 Burke-Michael 条件中的"开邻域"条件, 获得了这种新条件与备受关注的 wcs*网之间的精确联系, 同时借助 Nogura 和 Shibakov[1995]的正则化技巧(定义 1.4.14)减弱了空间对于正则分离性的要求, 将过去已获得的在点可数覆盖方向上关于弱基、cs 网、k 网和 cs*网等的一些重要结果统一到 wcs*网上, 肯定地回答了 2.1.1 中的所有问题.

易验证, 对于空间 X 的覆盖,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{sn 网} & \Rightarrow & (B) & \Rightarrow & (A) & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \text{cs 网} & \Rightarrow & \text{cs*网} & \Rightarrow & \text{wcs*网} & \Leftarrow & \text{k 网}, \end{array}$$

X 是 snf 可数空间$\Rightarrow$X 是α_4空间$\Leftrightarrow \sigma$X 是α_4空间$\Rightarrow \sigma$X 不含有闭子空间同胚于 $S_\omega \Rightarrow$X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

为了说明上述覆盖的进一步关系，我们先证明一个与著名的 Miščenko 引理(引理 1.3.6)类似的有趣结果. 对于空间 X 的子集 H 和 H 的序列邻域$\mathcal{P}$, 称$\mathcal{P}$是 H 的极小序列邻域, 若对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $H\not\subset \mathrm{int}_s(\cup(\mathcal{P}\setminus\{P\}))$.

引理 2.1.3(燕鹏飞, 林寿[1999a]) 如果$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数覆盖, 那么 X 的每一非空子集仅有至多可数个由$\mathcal{P}$的元组成的有限的极小序列邻域.

证明. 对于每一$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$，让$\mathcal{H}(\mathcal{F})=\{H\subset X$: $\mathcal{F}$是 H 的极小序列邻域$\}$. 设 H 是 X 的非空子集, 如果存在不可数个 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$, 则存在 $m\in N$ 和 $\mathcal{P}^{<\omega}$的不可数子集Λ使得对于每一$\mathcal{F}\in\Lambda$有$|\mathcal{F}|=m$ 且 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$.

设 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{P}$ 的满足对于不可数个 $\mathcal{F}\in\Lambda$ 有 $\mathcal{R}\subset\mathcal{F}$ 的极大子集，那么 $0\le|\mathcal{R}|<m$. 由于 $H\not\subset \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{R})$, 选取 $x\in H\setminus \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{R})$, 存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得所有的$x_n\notin\cup\mathcal{R}$. 让 $L=<x_n>$, $\Gamma=\{\mathcal{F}\in\Lambda: \mathcal{R}\subset\mathcal{F}\}$. 如果$\mathcal{F}\in\Gamma$，那么$\cup\mathcal{F}$是 x 的序列邻域, 于是 L 与$\mathcal{F}$的某些元相交. 因为$\mathcal{P}$是点可数的且$\Gamma$是不可数的, 所以存在 $P\in\mathcal{P}$使得 $L\cap P\ne\varnothing$ 且有Γ的不可数个元含有 P, 于是 $P\notin\mathcal{R}$ 且有Γ(因而Λ)的不可数个元含有$\mathcal{R}\cup\{P\}$, 这与$\mathcal{R}$的极大性矛盾. 故仅有至多可数个$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$. ▮

推论 2.1.4(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]) (1) 具有点可数 k 网的紧空间是可度量空间.
(2) 具有点可数 k 网的 k 空间是序列空间.

证明. (1) 设 X 是具有点可数 k 网$\mathcal{P}$的紧空间, 则 X 是正则空间. 让$\mathcal{P}'=\cup\{\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$: $\mathcal{F}$是 X 的极小序列邻域$\}$, $\mathcal{B}=\{\mathrm{int}(\cup\mathcal{F}) : \mathcal{F}\in(\mathcal{P}')^{<\omega}\}$. 这时 X 的极小序列邻域就是 X 的极小覆盖. 由引理 2.1.3, $\mathcal{B}$是可数的. 往证$\mathcal{B}$是 X 的基. 对于每一$x\in U\in\tau$，存在 X 的开子集 V 和$\mathcal{H}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$x\in V\subset\cup\mathcal{H}'\subset U$. 不妨设$\mathcal{H}'$是 V 的极小覆盖，对于每一$H\in\mathcal{H}'$, 存在 $x_H\in V\setminus\cup(\mathcal{H}'\setminus\{H\})$, 令 $C=\{x_H : H\in\mathcal{H}'\}$, 则存在$\mathcal{H}''\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$X\setminus V\subset\cup\mathcal{H}''\subset X\setminus C$. 让$\mathcal{H}=\mathcal{H}'\cup\mathcal{H}''$, 则$\mathcal{H}$

是 X 的序列邻域，于是存在 $\mathcal{H}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 是 X 的极小序列邻域. 如果 $H\in\mathcal{H}'$，则 H 是 $\mathcal{H}$ 中含有 x_H 的唯一元，于是 $H\in\mathcal{F}$，从而 $\mathcal{H}'\subset\mathcal{F}\subset\mathcal{P}'$ 且 $x\in V\subset \mathrm{int}(\cup\mathcal{H}')\subset U$. 所以 $\mathcal{B}$ 是 X 的基. 故 X 是可度量空间.

(2) 设 X 是具有点可数 k 网的 k 空间. 若 F 是 X 的序列闭集，对于 X 的任一紧子集 K，如果 $F\cap K$ 不是 K 的闭子集，由于 K 是可度量空间，于是存在 $F\cap K$ 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $K\setminus F$ 中的点，这与 F 是 X 的序列闭集相矛盾，从而 $F\cap K$ 是 K 的闭子集，所以 F 是 X 的闭子集. 故 X 是序列空间. ▮

引理 2.1.5　对于空间 X，考虑下述条件:

(1) X 有点可数覆盖满足(B).

(2) X 是具有点可数 cs*网的 α_4 空间.

(3) X 是具有点可数 wcs*网的 α_4 空间.

(4) X 有点可数覆盖满足(A).

那么(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4). 若更设 X 是正则空间，那么(4)$\Rightarrow$(1).

证明. (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)是显然的.

(3)$\Rightarrow$(4). 设空间 X 是α_4空间，且 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 wcs*网. 若 $\mathcal{P}$ 不具有(A)，则对于某一 $x\in U\in\tau$ 不存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$. 对于 U 的每一可数子集 C_j，让$\{P\in\mathcal{P}: P\cap C_j\neq\varnothing,\ P\subset U\}=\langle P_{ij}\rangle$. 让 $C_0=\{x\}$，那么 P_{10} 不是 x 在 X 中的序列邻域，存在 $U\setminus P_{10}$中收敛于点 x 的序列$\{x_{1n}\}$. 让 $C_1=\langle x_{1n}\rangle$，因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网，存在 $n_1\in N$ 和 C_1的无限子集 C_1'使得 $C_1'\subset\bigcup\{P_{ij}: 1\le i\le n_1,\ 0\le j\le 1\}$. 不失一般性，我们可以设 $C_1'=C_1$，那么$\bigcup\{P_{ij}: 1\le i\le n_1,\ 0\le j\le 1\}$不是 x 在 X 中的序列邻域. 继续上述的过程，对于每一 $m\in N$，可以归纳地选取 $C_m=\{x_{mn}: n\in N\}\subset U$ 和递增的序列$\{n_m\}$使得序列$\{x_{mn}\}_n$收敛于 x，且 $C_m\subset\bigcup\{P_{ij}: 1\le i\le n_m,\ 1\le j\le m\}\setminus\bigcup\{P_{ij}: 1\le i\le n_{m-1},\ 0\le j\le m\text{-}1\}$. 这说明每一 $P\in\mathcal{P}$ 仅与有限个 C_m 相交. 让 $S=\{x\}\cup(\bigcup_{m\in N}C_m)$，则 S 是 X 在 x 的扇. 因为 X 是$\alpha_4$空间, S 有对角收敛于 x，从而存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $P\subset U$ 且 P 与无限个 C_m 相交，矛盾. 故 $\mathcal{P}$ 有(A). 所以 X 有点可数覆盖满足(A).

(2)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 是具有点可数 cs*网的α_4空间. 让 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 cs*网. 对于每一 $x\in U\in\tau$，置

$\mathcal{F}_x=\{\cup\mathcal{P}'_x : \mathcal{P}'_x\in(\mathcal{P})_x^{<\omega}$ 且$\cup\mathcal{P}'_x$是 x 在 X 中的序列邻域}.

则 $\mathcal{F}_x$是可数的. 由定理 1.4.13 的(3)$\Rightarrow$(2)知, $\mathcal{F}_x$是 x 在 X 中的网. 从而, 存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in int_s(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$, 且 $x\in\cap\mathcal{F}$. 因此, $\mathcal{P}$满足条件(B).

(4)$\Rightarrow$(1). 设 X 是正则空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的满足(A)的点可数覆盖. 对于每一 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$，置 $M(\mathcal{F})=\{x\in X : \mathcal{F}$ 是$\{x\}$的极小序列邻域}. 对于每一 $P\in\mathcal{P}$. 让

$P'=P\cup(\cup\{M(\mathcal{F}): \mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}, P\in\mathcal{F}\})$.

那么 $P'\subset cl(P)$. 事实上, 对于每一$x\in M(\mathcal{F})$和 $P\in\mathcal{F}$有 $x\in int_s(\cup\mathcal{F})$, 而$x\notin int_s(\cup(\mathcal{F}\setminus\{P\}))$, 于是存在 P 中收敛于点 x 的序列, 因此 $x\in cl(P)$, 所以 $P'\subset cl(P)$. 让$\mathcal{P}'=\{P': P\in\mathcal{P}\}$. 对于每一 $x\in X$, 置$\mathcal{A}_x=\cup\{\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}: x\in M(\mathcal{F})\}$, 由引理 2.1.3, 仅对至多可数个$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$有 $x\in M(\mathcal{F})$, 所以$\mathcal{A}_x$是可数的. 因为 $x\in P'$当且仅当 $x\in P$, 或 $x\in M(\mathcal{F})$且 $P\in\mathcal{F}$, 于是 $P\in\mathcal{A}_x$, 故$\mathcal{P}'$是点可数的. 对于每一 $x\in W\in\tau$, 由于 X 的正则性, 存在 $U\in\tau$ 使得 $x\in U\subset cl(U)\subset W$. 选取 $\mathcal{F}_0\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in int_s(\cup\mathcal{F}_0)\subset\cup\mathcal{F}_0\subset U$. 不妨设 $x\in M(\mathcal{F}_0)$. 让 $\mathcal{F}_0'=\{P': P\in\mathcal{F}_0\}$, 那么对于每一 $P'\in\mathcal{F}_0'$有 $x\in P'$. 另一方面, $x\in int_s(\cup\mathcal{F}_0')\subset\cup\mathcal{F}_0'\subset cl(\cup\mathcal{F}_0')\subset cl(U)\subset W$. 所以$\mathcal{P}'$满足(B).

(4)$\Rightarrow$(3). 设空间(X,τ)有点可数覆盖 $\mathcal{P}$满足(A). 显然, (A)蕴含 wcs*网. 对于任一 $x_0\in X$, 设空间(X,τ^*)是(X,τ)在x_0的正则化拓扑空间, 那么τ^*是正则空间. 让$\mathcal{P}^*=\mathcal{P}\cup\{\{x\}: x\in X\}$, 则 $\mathcal{P}^*$在空间(X,τ^*)是点可数覆盖且满足(A). 事实上, 设 $x\in U\in\tau^*$, 若 $x\neq x_0$, 则$\{x\}\in\mathcal{P}^*$且在τ^*中 $x\in int_s(\{x\})=\{x\}\subset U$, 若 $x=x_0$, 则存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得在τ中 $x\in int_s(\cup\mathcal{P}')\subset\cup\mathcal{P}'\subset U$. 因为$\cup\mathcal{P}'$是 x 在$(X,\tau)$中的序列邻域, 于是$\cup\mathcal{P}'$是$(X,\tau^*)$的序列开集, 所以在$\tau^*$中 $x\in int_s(\cup\mathcal{P}')=\cup\mathcal{P}'\subset U$, 故$\mathcal{P}^*$有性质(A). 由(4)$\Rightarrow$(1)知$(X,\tau^*)$具有点可数覆盖满足(B), 所以$(X,\tau^*)$是 snf 可数空间, 故$(X,\tau)$在 x_0是 snf 可数空间. 因此(X,τ)是

α_4空间. ▌

引理 2.1.6　对于空间 X, 考虑下述条件:

(1) X 有点可数 cs*网且 X 的每一紧子集是序列紧的.

(2) X 有点可数 wcs*网且 X 的每一紧子集是序列紧的.

(3) X 有点可数 k 网.

那么(1)$\Rightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3). 若更设 X 是正则的α_4空间, 那么(2)$\Rightarrow$(1).

证明. 显然, (1)$\Rightarrow$(2). 由推论 2.1.4(1)知(3)$\Rightarrow$(2). 若 X 是正则的α_4空间, 由引理 2.1.5 知(2)$\Rightarrow$(1).

(2)$\Rightarrow$(3). 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 wcs*网且 X 的每一紧子集是序列紧的. 对于 X 的紧子集 $K\subset U\in\tau$ 和 $x\in K$, 记

$\mathcal{H}=\{P\in\mathcal{P}: P\subset U\}$, $(\mathcal{H})_x=\langle P_n(x)\rangle$.

若不存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{H}^{<\omega}$ 使得 $K\subset\cup\mathcal{F}$, 则可选取 K 中的序列$\{x_k\}$使得当 n, j<k 时有 $x_k\notin P_n(x_j)$. 这时每一 $P_n(x_j)$仅含有$\{x_k\}$的有限项. 因为 K 是序列紧的, 所以序列$\{x_k\}$存在收敛的子序列$\{x_{k_i}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网, 于是存在 $P\in\mathcal{H}$ 使得 P 含有无限项 x_{k_i}, 矛盾. 故存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{H}^{<\omega}$ 使得 $K\subset\cup\mathcal{F}$. 这说明 $\mathcal{P}$是 X 的 k 网. (3)成立. ▌

推论 2.1.7　设 X 是强 Fréchet 空间, 那么

(1) 若 X 具有点可数 cs*网, 则 X 具有点可数基.

(2) 若 X 是具有点可数 wcs*网的正则空间, 则 X 具有点可数基.

(3) 若 X 具有点可数 wcs*网, 则 X 是第一可数空间.

证明. (1) 设 X 是具有点可数 cs*网的强 Fréchet 空间. 由引理 2.1.5, X 具有点可数覆盖 $\mathcal{P}$满足(B). 由引理 1.4.7, 条件(B)中的序列邻域可加强为相应点的邻域. 这时 X 是第一可数空间. 对于每一 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$, 置 $\mathcal{H}(\mathcal{F})=\{H\subset X: \mathcal{F}$ 是 H 的极小序列邻域$\}$, $V(\mathcal{F})=\mathrm{int}(\cup(\mathcal{H}(\mathcal{F})\cap\mathcal{P}))$, $\mathcal{V}=\{V(\mathcal{F}): \mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}\}$.

首先, $\mathcal{V}$ 是 X 的点可数集族. 若 $x\in V(\mathcal{F})$, 则存在 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})\cap\mathcal{P}$ 使得 $x\in H$. 由引理 2.1.3, 仅有至多可数个 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$, 而 x 属于 $\mathcal{P}$ 的至多可数个元, 于是 x 属于 $\mathcal{V}$的至多可数个

元. 其次, $\mathcal{V}$是 X 的基. 对于每一$x\in U\in\tau$, 存在$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$x\in \text{int}(\cup\mathcal{F})\subset U$, 不妨设$\mathcal{F}$是$\{x\}$的极小序列邻域. 取 $\mathcal{G}\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得 $x\in\cap\mathcal{G}$, $x\in\text{int}(\cup\mathcal{G})\subset\cup\mathcal{G}\subset\text{int}(\cup\mathcal{F})$. 若 $G\in\mathcal{G}$, 那么$G\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$, 于是 $\text{int}(\cup\mathcal{G})\subset V(\mathcal{F})$, 从而$x\in V(\mathcal{F})\subset U$. 即$\mathcal{V}$是 X 的点可数基.

由引理 2.1.6 和(1)知(2)成立.

设(X, τ)是具有点可数 wcs*网的强 Fréchet 空间, 我们证明 X 是第一可数空间. 对于任一$x_0\in X$, 设空间(X, τ^*)是(X, τ)在x_0的正则化拓扑空间, 那么τ^*是正则空间. 设$\mathcal{P}$是空间(X, τ)的点可数 wcs*网, 记$\mathcal{P}^*=\{\{x\}: x\in X\}\cup\mathcal{P}$, 则$\mathcal{P}^*$是$(X, \tau^*)$的点可数wcs*网. 由引理 1.4.15, (X, τ^*)也是强Fréchet空间. 由(2), (X, τ^*)是第一可数空间, 于是(X, τ)在x_0具有可数局部基. 故 X 是第一可数空间. ▊

引入条件(A)和(B)的目的之一是想寻求从点可数 k 网到点可数 cs*网的过渡条件. 这涉及刘川提出的下述问题.

问题 2.1.8(林寿, 燕鹏飞[1998]) 若具有点可数 k 网的 Fréchet 的正则空间 X 不含有闭子空间同胚于S_{ω_1}, 那么 X 是否具有点可数的 cs*网?

引理 2.1.6表明, 具有点可数k网的正则的α_4空间具有点可数的cs*网. 在对该问题的讨论中, 我们意外地发现问题 2.1.1(4)的回答是肯定的. 为此, 下面说明S_2, S_ω与弱第一可数性的关系.

定理 2.1.9 设空间 X 具有点可数 wcs*网, 那么

(1) 如果σX不含有闭子空间同胚于S_2, 则σX是 Fréchet 空间.

(2) 如果σX不含有闭子空间同胚于S_ω, 则σX是 gf 可数空间.

证明. 让$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数 wcs*网.

(1) 我们用反证法证明(1)成立. 设σX不是Fréchet空间. 由引理 1.4.11, 存在X的子集H使得 $cl_s(H)$不是σX的闭子集. 因为σX是序列空间, 存在 $cl_s(H)$中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in X\setminus cl_s(H)$. 不妨设$\{x_n\}$的各项是两两互不相同的且所有的$x_n\notin H$. 由于 X 是T_2空间, 存在X中两两互不相交的开子集列$\{V_n\}$使得每一$x_n\in V_n$. 对于每一$n\in N$, 存在$H\cap V_n$中的序列$\{x_{nm}\}$收敛于点x_n. 置$C=[x_n]\cup\{x_{nm}: n, m\in N\}$, 则C是x在X中的梳. 如果$\sigma C$不同胚于$S_2$, 因为$\sigma C$

是序列空间, 所以它的拓扑由收敛序列所确定, 故C有对角. 让$\{y_k\}$是C中收敛于某点y的对角. 由于 $x\notin cl_s(H)$, 所以 $y\neq x$, 从而对于某个 $i\in N$ 有 $y\in V_i$, 于是存在 $j\in N$ 使得当 $k\geq j$ 时有 $y_k\in V_i$, 这与$\{V_n\}$是两两互不相交的相矛盾, 故σC 同胚于 S_2. 置 $K=[x_n]$, $\mathcal{R}=\{P\in\mathcal{P}$: $P\cap\{x_{nm}$: n, $m\in N\}\neq\varnothing$, $cl(P)\cap K=\varnothing\}$, 则 $\mathcal{R}$ 是可数的. 让 $\mathcal{R}=<P_k>$. 对于每一 $n\in N$, 存在 $m_n\in N$ 使得$\{x_{nm}$: $m\geq m_n\}\subset X\setminus\bigcup_{k\leq n}cl(P_k)$. 取 $S=K\cup\{x_{nm}$: $n\in N$, $m\geq m_n\}$, 那么σS 同胚于 S_2. 如果σS 不是σX 的闭子集, 存在 S 中的序列$\{x_{n_im_i}\}$收敛于 $x'\notin S$. 我们可以假设 $n_{i+1}>n_i$. 置 $K_1=[x_{n_im_i}]$, 那么 $K_1\cap K=\varnothing$, 于是存在 X 中的开子集 U 使得 $K_1\subset U\subset cl(U)\subset X\setminus K$. 由于$\mathcal{P}$是 X 的 wcs*网, 存在$P\in\mathcal{P}$使得$P\cap K_1$是无限的且$P\subset U$, 从而有$j\in N$使得$P=P_j$, 由$m_n$的选取和S的定义知对于每一$n_i\geq j$有$x_{n_im_i}\notin P$, 矛盾. 故$\sigma S$在$\sigma X$中是闭的, 所以$\sigma X$含有闭子空间同胚于$S_2$. (1)成立.

(2) 设σX不含有闭子空间同胚于S_ω.

首先, 我们证明X是α_4空间. 若X不是α_4空间, 则存在X中的点x及X中在x的扇F使得F没有对角收敛于x. 置

$F=\{x\}\cup\{x_{nm}$: n, $m\in N\}$,

$\mathcal{R}=\{P\in\mathcal{P}: P\cap\{x_{nm}$: n, $m\in N\}\neq\varnothing$, $x\notin cl(P)\}=<P_k>$.

对于每一 $n\in N$ 存在 $m_n\in N$ 使得$\{x_{nm}$: $m\geq m_n\}\subset X\setminus\bigcup_{k\leq n}cl(P_k)$. 取 $T=\{x\}\cup\{x_{nm}$: $n\in N$, $m\geq m_n\}$, 则T是x在X中的扇且没有对角收敛于x. 如果存在T中的序列$\{x_{n_im_i}\}$收敛于$x'\neq x$. 不妨设 $n_{i+1}>n_i$, 那么存在 $P\in\mathcal{R}$ 使得 $P\cap<x_{n_im_i}>$是无限的, 这与m_n的选取及T的构造相矛盾. 因此σT是σX的闭子空间且同胚于S_ω, 矛盾, 故X是α_4空间.

其次, 证明X是snf可数空间. 对于任一$x_0\in X$, 设空间(X, τ^*)是(X, τ)在x_0的正则化拓扑空间, 那么τ^*具有点可数的 wcs*网 $\mathcal{P}\cup\{\{x\}$: $x\in X\}$. 由引理 1.4.15, τ^*是正则的α_4空间. 由引理2.1.5, τ^*具有点可数覆盖满足条件(B), 于是τ^*在x_0具有可数的sn网, 从而τ在x_0也具

有可数的 sn 网, 故 X 是 snf 可数空间.

由定理 1.4.13, σX 是 gf 可数空间. █

由推论 1.3.9, 引理 1.4.2 和引理 1.4.3 有下述结果.

引理 2.1.10(Tanaka[1987b]) 空间 X 是度量空间的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cs*网的序列空间. █

下述两个推论肯定地回答了 2.1.1 中的全部问题.

推论 2.1.11 设 X 是具有点可数 wcs*网的序列空间, 那么

(1) X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2.

(2) X 是 gf 可数空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(3) X 是第一可数空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

若更设 X 是正则空间, 那么

(4) X 具有点可数基当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

证明. 由定理 2.1.9 及推论 1.4.8 知(1)~(3)成立. 若更设 X 是正则空间, 如果 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 由(3)和推论 2.1.7 可得(4). █

推论 2.1.12 (1) 空间 X 具有点可数 sn 网当且仅当 X 具有点可数 cs 网且σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(2) 空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(3) 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是具有点可数 cs*网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

证明. (1) 设空间 X 具有点可数 cs 网且σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω. 由定理 2.1.9 和定理 1.4.13, X 是 snf 可数空间. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs 网, 我们证明 $\mathcal{P}$ 的某子族构成 X 的 sn 网. 对于每一 $x\in X$, 设$\langle V_n\rangle$是 x 在 X 中递减的 sn 网. 置 $\mathcal{P}_x=\{P\in\mathcal{P}$: 存在 $n\in N$ 使得 $V_n\subset P\}$, 那么 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中关于有限交封闭的序列邻域族. 若 $\mathcal{P}_x$ 不是 x 在 X 中的 sn 网, 则存在 x 在 X 中的开邻域 G 使得 $\mathcal{P}_x$ 中的每一元都不含于 G 中. 记$\{F\in\mathcal{P}: x\in F\subset G\}=\langle F_m\rangle$, 那

么每一 $V_n\not\subset F_m$. 取定 $x_{nm}\in V_n\setminus F_m$. 对于 $n\geq m$, 令 $y_k=x_{nm}$, 其中 $k=m+\dfrac{n(n-1)}{2}$, 则序列 $\{y_k\}$收敛于x, 于是存在m, i∈N使得$\{y_k : k\geq i\}\subset F_m$. 取定$k\geq i$使得对于某个$n\geq m$有$y_k=x_{nm}$, 那么 $x_{nm}\in F_m$, 矛盾. 从而, $\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是 X 的点可数 sn 网. (1)成立.

由(1)和引理 1.4.6 可得(2). 由引理 2.1.10, 推论 2.1.11 和推论 2.1.7 可得(3). ∎

推论 2.1.13(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]) 具有点可数 k 网的可数紧的 k 空间是紧度量空间.

证明. 设 X 是具有点可数 k 网的可数紧的 k 空间. 由推论 2.1.4 和推论 2.1.11, X 是第一可数空间. 记 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 k 网. 对于每一 $x\in U\in\tau$, 由引理 2.1.5, 存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$. 由于 X 是第一可数空间, 于是$x\in \mathrm{int}(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$, 从而存在 X 的开子集 V 使得$x\in V\subset\cup\mathcal{F}\subset U$. 由推论 2.1.4(1)所证知, X 具有可数基, 因此 X 是紧度量空间. ∎

若空间 X 关于度量子空间组成的点可数覆盖具有弱拓扑, 则 X 是度量空间的商 s 映象. 如果更设 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 则 X 具有点可数基. 由此可得出 Franklin 和 Thomas[1977b]的定理: 具有可度量"块"的 k_ω 空间是可度量空间当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

推论 2.1.14(Burke, Michael[1976]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 有点可数基.

(2) X 有点可数覆盖 $\mathcal{P}$ 使得如果 $x\in U\in\tau$, 则存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 有 $x\in \mathrm{int}(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$ 且 $x\in\cap\mathcal{F}$.

若更设 X 是正则空间, 则它们也与下述条件相互等价:

(3) X 是 k 空间且有点可数覆盖 $\mathcal{P}$ 使得如果 $x\in U\in\tau$, 则存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 有 $x\in \mathrm{int}(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$.

证明. (1)⇒(2)⇒(3)是显然的. 若空间 X 满足(2), 则 X 是具有点可数 cs*网的第一可数空间, 由推论 2.1.7 知 X 具有点可数基. 若正则空间 X 满足(3), 则 X 具有点可数 k 网, 由推论 2.1.4 知 X 是序列空间. 又由于这时 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 由推论 2.1.11 知 X 具有点可数基.

∎

具有点可数基的空间是亚 Lindelöf 空间. 例 1.5.4 已表明具有点可数弱基的正则空间未必是亚 Lindelöf空间. 定理 2.1.15 将说明具有点可数 wcs*网空间与亚 Lindelöf 空间的关系. 为证明的简明起见, 引入几个术语和记号. 空间 X 的覆盖 $\mathcal{U}$ 称为 X 的按子标良序覆盖, 若 $\mathcal{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 其中 Λ 是良序子标集. 对于这种覆盖 $\mathcal{U}$, 若 $x\in X$, 记 $\alpha(x)=\min\{\alpha\in\Lambda: x\in U_\alpha\}$; 若 $\alpha\in\Lambda$, 记 $\tilde{U}_\alpha=\{x\in X: \alpha(x)=\alpha\}$. 显然, $\tilde{U}_\alpha\subset U_\alpha$.

定理 2.1.15 具有点可数 wcs*网的正则的 Fréchet 空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

证明. 考虑下述断言:

(1) X 是具有点可数 wcs*网的正则的 Fréchet 空间.

(2) X 的每一按子标良序开覆盖 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 存在点可数加细 $\mathcal{H}$ 使得若 $x\in X$, 则 $x\in \text{int}(\cup\{P\in\mathcal{H}: x\in \text{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\})$.

(3) X 的每一按子标良序开覆盖 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 存在点可数开加细 $\{V_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 使得若 $\alpha\in\Lambda$, 则 $\tilde{U}_\alpha\subset V_\alpha\subset U_\alpha$.

(4) X 是遗传亚 Lindelöf 空间.

我们证明(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4).

(1)$\Rightarrow$(2). 设空间 X 满足断言(1). 让 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 wcs*网. 对于 X 的每一按子标良序开覆盖 $\mathcal{U}$, 置 $\mathcal{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, $\mathcal{H}=\{P\in\mathcal{P}$: 存在 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $P\subset U_\alpha\}$, 则 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{U}$ 的点可数加细. 若 $x\in X$, 那么 $x\in U_{\alpha(x)}$, 于是存在 X 的开子集 V 使得 $x\in V\subset \text{cl}(V)\subset U_{\alpha(x)}$. 若 $x\in X\setminus \text{int}(\bigcup\{P\in\mathcal{H}: x\in \text{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\})=\text{cl}(X\setminus\bigcup\{P\in\mathcal{H}: x\in \text{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\})$, 则存在 $X\setminus\bigcup\{P\in\mathcal{H}: x\in \text{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 从而存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $P\subset V$ 且 P 含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项, 那么 $x\in \text{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}$ 且 $P\in\mathcal{H}$, 这与 $\{x_n\}$ 的选取相矛盾. 故 $x\in \text{int}(\bigcup\{P\in\mathcal{H}: x\in \text{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\})$.

(2)$\Rightarrow$(3). 设空间 X 满足断言(2)且 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的按子标良序开覆盖. 让 $\mathcal{H}$ 是 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的满足(2)的点可数加细. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 置 $V_\alpha=\text{int}(\bigcup\{H\in\mathcal{H}: \text{cl}(H)\subset U_\alpha$, 当 $\beta<\alpha$ 时有 $\text{cl}(H)\not\subset U_\beta\})$, 则 $\{V_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的点可数开加细且满足: 若 $\alpha\in\Lambda$, 则

$\tilde{U}_{\alpha} \subset V_{\alpha} \subset U_{\alpha}$.

(3)$\Rightarrow$(4). 设空间 X 满足断言(3)且 Y 是 X 的子空间. 对于 Y 的按子标良序开覆盖 $\mathscr{W}$, 置 $\mathscr{W}$={W_{α} : $\alpha < \gamma$ }, 取 X 的按子标良序开覆盖{U_{α} : $\alpha \le \gamma$ }使得 U_{γ}=X 且当$\alpha < \gamma$ 时有 $U_{\alpha} \cap Y$=W_{α}. 让{V_{α} : $\alpha \le \gamma$ }是{U_{α} : $\alpha \le \gamma$ }的满足(3)的点可数开加细. 若 y$\in$Y, 则存在 $\alpha < \gamma$ 使得 y$\in \tilde{U}_{\alpha} \subset V_{\alpha}$, 从而{$V_{\alpha} \cap Y$: $\alpha < \gamma$ }是$\mathscr{W}$的点可数开加细, 因此 Y 是亚 Lindelöf 空间. 故 X 是遗传亚 Lindelöf 空间. █

例 2.1.16 (1) X 有点可数覆盖满足(B)$\not\Rightarrow$X 有点可数 cs 网; 如例 1.5.6 中的空间 X 是具有点可数 k 网的正则的 gf 可数空间, 于是 X 具有点可数覆盖满足(B), 但是 X 不具有点可数 cs 网.

(2) X 有点可数 sn 网$\not\Rightarrow$X 有点可数 k 网; 例如极大紧化βN.

(3) X既有点可数覆盖满足(A)又有点可数k网$\not\Rightarrow$X有点可数 cs*网; 如例 1.5.8 中的半园盘拓扑空间X 是具有点可数k网的第一可数空间, 由引理 2.1.5, X 有点可数覆盖满足(A), 但是 X 不具有点可数 cs*网. 这表明引理 2.1.5, 引理 2.1.6, 推论 2.1.7, 问题 2.1.8, 推论 2.1.11 和推论 2.1.14 中空间的正则性是必不可少的.

(4) X 有点可数 cs 网$\not\Rightarrow$X 有点可数覆盖满足(A); 如例 1.5.2 中的序列扇 S_{ω}.

(5) X 有点可数 k 网$\not\Rightarrow$X 有点可数 cs*网, 或X 有点可数覆盖满足(A); 如例 1.5.2 中的扇空间 S_{ω_1}.

(6) X 有点可数 cs 网且不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_{ω} $\not\Rightarrow$ σX 不含有闭子空间同胚于 S_{ω}; 如例 1.5.3 中的空间 T.

(7) X 是具有点可数基的正则空间$\not\Rightarrow$X 有点可数闭 k 网; 如 Foged[1996]中的空间 X. █

问题 2.1.17 (1)(刘川, Tanaka[1996b]) 设 X 是具有点可数 cs*网的序列空间, 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2, 那么 X 是否具有点可数 cs 网?

(2) 用度量空间的适当映象刻画具有点可数 wcs*网的空间.

2.2 k 网与闭映射

本节介绍具有点可数 k 网空间的闭映射性质. 该问题的探讨源于 Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]关于具有点可数覆盖空间运算性质的研究. 他们证明了完备映射保持具有点可数 k

网的空间，并且提出问题：度量空间的闭映象是否具有点可数 k 网？利用 k 网对度量空间闭映象的刻画，Foged[1985]肯定地回答了这一问题. 另一方面，从例 1.5.2 中的扇空间 S_{ω_1} 知，介于具有点可数基性质与具有点可数 cs*网性质之间的拓扑性质或具有点可数闭 k 网性质都不被闭映射所保持. 林寿和 Tanaka[1994]提出下述问题.

问题 2.2.1 具有点可数 k 网空间的闭映象是否具有点可数 k 网?

下述例子否定地回答了问题 2.2.1. 空间 X 的点 x 称为弱 P 点，如果对于 $X\setminus\{x\}$的每一可数子集 C 有 $x\notin cl(C)$. 由集论拓扑(Kunen[1978])知空间 $N^*=\beta N\setminus N$ 中含有弱 P 点.

例 2.2.2(Sakai[1997b]) 闭映射不保持具有点可数 k 网的空间.

设 D 是任一基数为ω_1 的集合，赋予 D 离散拓扑，让 $D^*=\beta D\setminus D$, $E=\{p\in D^* : p$ 是 D^*中的弱 P 点$\}$，则 E 是 D*的稠子集. 取 $X=D\cup E$, X 赋予βD 的子空间拓扑. 由于每一点是弱 P 点的紧空间是有限集，且βD 中不存在非平凡的收敛序列，所以 X 的所有紧子集是有限集，于是 X 具有点可数 k 网. 让 Y=X/E, $f:X\to Y$ 是自然商映射，则 f 是闭映射. 由于 D 的每一无限子集的闭包与 E 相交，所以 Y 同胚于 D 的单点紧化，从而 Y 不是可度量空间. 由推论 2.1.4, Y 不具有点可数 k 网. ∎

在怎样的附加条件下，问题 2.2.1 的回答是肯定的? 我们介绍 Sakai 和 Tanaka 等的相关结果. 先叙述几个闭映射的辅助性质.

引理 2.2.3 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, K 是 Y 的可数紧子集. 若 $f^{-1}(K)$中的序列$\{x_n\}$使得当 $n\neq m$ 时有 $f(x_n)\neq f(x_m)$，如果下述条件之一成立，则$\{x_n\}$存在收敛的子序列.

(1) X 是序列空间.

(2) X 是具有点 G_δ 性质的正则空间.

证明. 不妨设$\langle x_n\rangle$不是 X 的闭子集. 如果(1)成立，那么$\{x_n\}$存在收敛的子序列. 如果(2)成立，由于 K 是 Y 的可数紧子集且 f 是闭映射，序列$\{x_n\}$的任何子序列在 $f^{-1}(K)$中有聚点. 让 x 是$\{x_n\}$的聚点且$\{V_n\}$是 x 的开邻域列使得每一 $cl(V_{n+1})\subset V_n$. 取$\{x_n\}$的子序列$\{t_k\}$使得每一 $t_k\in V_k$. 让 p 是$\{t_k\}$的任一子序列的聚点，那么 $p\in\bigcap_{n\in N}cl(V_n)$，于是 p=x. 这说明 x 是序列$\{t_k\}$的唯一聚点，所以$\{t_k\}$是$\{x_n\}$的收敛子序列. ∎

空间 X 称为等紧空间，若 X 的每一可数紧的闭子集是 X 的紧子集.

引理 2.2.4　设 $f:X\to Y$ 是闭映射，如果下述条件之一成立，则 f 是紧覆盖映射.

(1) X 是正规的等紧空间.

(2) X 是正则空间且每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间.

证明. (1) 对于 Y 的非空紧子集 K，让 $g=f_{|f^{-1}(K)}:f^{-1}(K)\to K$，则 g 是闭映射. 由于 $f^{-1}(K)$ 是正规的等紧空间，从定理 1.3.3 中(2)⇒(3)的证明知，每一 $\partial g^{-1}(y)$ 是 $f^{-1}(K)$ 的紧子集. 再由引理 1.3.2，存在 $f^{-1}(K)$ 的闭子集 Z 使得 $g_{|Z}:Z\to K$ 是完备映射，从而 Z 是 X 的紧子集且 f(Z)=K，故 f 是紧覆盖映射.

(2) 由于每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间，由引理 1.3.2，存在 X 的闭子集 F 使得 $h=f_{|F}:F\to Y$ 是闭映射且每一 $h^{-1}(y)$ 是 F 的 Lindelöf 子空间. 对于 Y 的非空紧子集 K, $h^{-1}(K)$ 是 F 的 Lindelöf 子空间，于是 $h^{-1}(K)$ 是仿紧空间，从而 $h^{-1}(K)$ 是正规的等紧空间. 由(1)，存在 $h^{-1}(K)$ 的紧子集 L 使得 h(L)=K，即 f(L)=K，所以 f 是紧覆盖映射. ∎

定理 2.2.5(林寿，Tanaka[1994])　设 $f:X\to Y$ 是闭映射，X 具有点可数 k 网. 如果下述条件之一成立，则 Y 也具有点可数 k 网.

(1)　X 是 k 空间.

(2)　X 是具有点 G_δ 性质的正则空间.

(3)　X 是正规的等紧空间.

(4)　X 是正则空间且每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间.

证明. 由推论 2.1.4, X 的每一紧子集是可度量子空间. 由引理 2.2.3 和引理 2.2.4, Y 的每一紧子集是序列紧的. 由引理 2.1.6，为证明 Y 具有点可数 k 网，只须证明 Y 具有点可数 wcs*网. 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 k 网. 令 $D=\{x_y : y\in Y\}$，其中取定每一 $x_y\in f^{-1}(y)$，再令 $\mathcal{P}^*=\{f(D\cap P) : P\in\mathcal{P}\}$，那么 $\mathcal{P}^*$ 是 Y 的点可数覆盖，往证它是 Y 的 wcs*网. 设 $\{y_n\}$ 是 Y 中收敛于点 y 的序列，且 U 是 y 的邻域. 不妨设 y, y_n 的各项是两两互不相同的且所有的 $y_n\in U$. 对于每一 $n\in N$，选择 $x_n\in f^{-1}(y_n)\cap D$，则在 $f^{-1}(U)$ 中序列 $\{x_n\}$ 存在收敛的子序列. 事实上，如果(1)或(2)成立，由引

理 2.2.3, 在 $f^{-1}(U)$中序列$\{x_n\}$存在收敛的子序列. 如果(3)或(4)成立, 令 $Z=\langle x_n\rangle\cup\partial f^{-1}(y)$. 因为 f 是闭映射, 所以 Z 是 X 的闭子集且 $g=f_{|Z}:Z\to[y_n]$是闭映射. 由引理 2.2.4, g 是紧覆盖映射, 于是存在 Z 的紧子集 L 使得 $g(L)=[y_n]$, 从而$\langle x_n\rangle\subset L\subset f^{-1}(U)$, 所以在 $f^{-1}(U)$中序列$\{x_n\}$存在收敛的子序列. 这时存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 P 含有$\{x_n\}$的子序列且 $P\subset f^{-1}(U)$, 从而 $f(D\cap P)$含有$\{y_n\}$的子序列且 $f(D\cap P)\subset U$. 因此 $\mathcal{P}$*是 Y 的 wcs*网. 故 Y 具有点可数 k 网. ▌

由定理 2.2.5 和推论 2.1.7, 我们有

推论 2.2.6 开闭映射保持具有点可数基的正则空间. ▌

引理 2.2.4 已表明闭映射与紧覆盖映射的密切联系. 在例 2.2.2 中 $f:X\to Y$ 是闭映射, X 的所有紧子集是有限集, Y 是紧空间, 于是 f 不是紧覆盖映射, 所以具有点可数 k 网空间上的闭映射未必是紧覆盖映射.

猜测 2.2.7 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖的闭映射. 若空间 X 具有点可数 k 网, 那么空间 Y 具有点可数 k 网当且仅当 Y 的每一紧子集是可度量的.

作为对这一猜测的一种支持, 下面我们将证明在定理2.2.5 的条件(1)或(2)下, f 是紧覆盖映射.

定义 2.2.8(Davis[1984]) 空间 X 称为序列可分的, 如果存在 X 的可数子集 D 使得对于每一 $x\in X$ 有 D 中的序列$\{x_n\}$使得$\{x_n\}$在 X 中收敛于 x. 这时 D 称为 X 的序列稠子集.

引理 2.2.9(林寿, 燕鹏飞[2001a]) 设 X 是序列可分空间, 如果下述条件之一成立, 则 X 具有可数网.

(1) X 有点可数 cs*网.

(2) X 是具有点可数 wcs*网的正则空间.

证明. 设 D 是序列可分空间 X 的可数的序列稠子集.

(1) 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 cs*网, 置 $\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P}: P\cap D\neq\varnothing\}$, 则 $\mathcal{P}'$是可数的. 对于每一 $x\in U\in\tau$, 存在D 中的序列 S收敛于 x, 于是存在 $P\in\mathcal{P}$使得 $x\in P\cap S\neq\varnothing$且 $P\subset U$, 从而 $P\in\mathcal{P}'$, 因此 $\mathcal{P}'$是 X 的可数网.

(2) 设 $\mathcal{P}$ 是正则空间 X 的点可数 wcs*网, 置 $\mathcal{P}'=\{cl(P): P\in\mathcal{P}, P\cap D\neq\varnothing\}$, 则 $\mathcal{P}'$是可数的. 对于每一 $x\in U\in\tau$, 存在 D 中的序列 S 和 x 的开邻域 V 使得 S 收敛于 x 且 $cl(V)\subset U$, 于是存在 $P\in\mathcal{P}$使得 P 含有 S 中的无限项且 $P\subset V$, 那么 $cl(P)\in\mathcal{P}'$且 $x\in cl(P)\subset U$, 故 $\mathcal{P}'$是 X 的可数网. ▌

定理 2.2.10(林寿, 刘川[1996]; Shibakov[1995b]) 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是具有点可

数 k 网的正则空间，若下述条件之一成立，则 f 是紧覆盖映射.

(1) X 是 k 空间.

(2) X 是点 G_δ 空间.

证明. 让 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 k 网. 由定理 2.2.5，空间 Y 具有点可数 k 网，因此 Y 的每一紧子集是可度量的. 让 K 是 Y 的紧子集，那么 K 有可数的稠子集 D. 对于每一 $y\in D$，取定点 $x_y\in f^{-1}(y)$，置 $E=\{x_y : y\in D\}$，则 E 是可数的且 f(cl(E))=K. 我们先证明 E 是 cl(E)的序列稠子集. 由引理 2.2.3, E 中的每一序列在 X 中有收敛的子序列. 设 $x\in cl(E)$.

如果(1)成立，不妨设 $x\in cl(E)\setminus E$. 让 $\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P} : x\notin cl(P)\}$. 对于 $z\in E$，记$(\mathcal{P}')_z=<P_k(z)>$. 取定 $x_1\in E$，则 $x_1\neq x$. 由归纳法可选取 E 的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in E\setminus\bigcup_{k,n<i}P_k(x_n)$. 否则，存在 $i_0\geq 2$ 使得 $E\subset\bigcup_{k,n<i_0}P_k(x_n)$，于是 $x\in\bigcup_{k,n<i_0}cl(P_k(x_n))$，矛盾. 设 z 是$\{x_i\}$的一个聚点. 若 $x\neq z$，则存在 X 中分别含有 x, z 的互不相交的开子集 U 和 V. 令 $S=\{x_i\in V\setminus\{z\} : i\in N\}$，则 S 不是 X 的闭子集. 由推论 2.1.4, X 是序列空间，于是 S 不是 X 的序列闭子集, 所以存在 S 中的序列 T 收敛于某点 $t\notin S$. 这时 $t\in cl(V)$，从而 $t\neq x$. 选取 X 中分别含有 x，t 的互不相交的开子集 G 和 W，则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $P\subset W$ 且 P 含有序列 T 的无限项，所以 $P\in\mathcal{P}'$ 且存在 $k, n\in N$ 使得 $P=P_k(x_n)$，因此当 i>max{k, n}时有 $x_i\notin P$，矛盾. 故 x 是$\{x_i\}$的唯一聚点. 因为$\{x_i\}$的每一子序列在 X 中有聚点，所以$\{x_i\}$收敛于 x.

如果(2)成立，取 X 的开子集列$\{G_i\}$使得每一 $cl(G_{i+1})\subset G_i$ 且 $\{x\}=\bigcap_{i\in N}G_i$，那么对于每一 $i\in N$ 存在 $x_i\in E\cap G_i$. 设 z 是序列$\{x_i\}$的一个聚点，则 $z\in\bigcap_{i\in N}cl(G_i)=\{x\}$，于是 x 是序列$\{x_i\}$的唯一聚点，所以序列$\{x_i\}$收敛于 x.

由引理 2.2.9, cl(E)具有可数网，故 cl(E)是 Lindelöf 空间. 由引理 2.2.4, $f_{|cl(E)} : cl(E)\to K$ 是紧覆盖映射，所以存在 cl(E)的紧子集 L 使得 f(L)=K，因此 f 是紧覆盖映射. ▌

例 2.2.11 (1) 局部紧可展空间上的闭映射未必是紧覆盖映射.

如例 1.5.3，让 X 是 Gillman-Jerison 空间$\psi(N)$，则 X 是局部紧可展空间. 记 $X=\mathcal{A}\cup N$，让 $f:X\to S_1$ 使得 $f(\mathcal{A})=\{0\}$ 且 f(n)=1/n，那么 f 是闭映射，但是 f 不是紧覆盖映射.

(2) 具有可数基空间上的闭映射未必是紧覆盖映射.

如Shibakov[1995b]的例2.1. 让$X=N^2\cup\omega$. 集合X赋予下述拓扑: N^2中的点是X的孤立点; N中的点n的邻域基元形如$\{n\}\cup\{(n, m)\in N^2 : m\geq k\}$, $k\in N$; 0的邻域基元形如$\{0\}\cup(N^2\setminus(\{1, 2, \ldots, k\}\times N))$, $k\in N$. 易验证, 空间X具有可数基. 定义$f:X\to S_1$使得$f(\omega)=\{0\}$且N^2与$S_1\setminus\{0\}$一一对应, 则f是闭映射, 但是f不是紧覆盖映射. ▉

问题 2.2.12(Sakai[1997b]) 是否任一空间可表为具有点可数k网空间的闭映象?

2.3 序列网与商映射

商映射的引入已有 50 年的历史(Gale[1950]), 诱发的在度量空间上的商映射、商 s 映射和商紧映射等的研究是丰富多彩的(林寿[1995]). 关于度量空间的商映象有很简单的刻画(林寿[1995], 定理 2.3.6).

引理 2.3.1 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是序列空间.

(2) X 是局部紧度量空间的商映象.

(3) X 是度量空间的商映象.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 设 X 是序列空间, 令 $\mathcal{S}$={S : S 是 X 中含极限点的收敛序列}, 则 X 的子集 E 是 X 的闭子集当且仅当对于每一 S$\in\mathcal{S}$, S$\cap$E 是 X 的闭子集. 置 M=$\oplus\mathcal{S}$, 则 M 是局部紧的度量空间. 让 f:M$\rightarrow$X 是自然映射, 则 f 是商映射.

(2)$\Rightarrow$(3)是显然的, 而由引理 1.4.3 知(3)$\Rightarrow$(1). ▮

关于度量空间确定的商映象, Arhangel'skii 提出下述问题.

问题 2.3.2 (1)(Svetlichny[1993]) 是否每一具有权数κ的序列空间是某一具有权数κ的度量空间的商映象?

(2)(Arhangel'skii[1966]) 刻画度量空间的商 s 映象.

问题(1)是 Svetlichny[1993]介绍的由 Arhangel'skii 在莫斯科拓扑学会议上提出的问题. Svetlichny[1993]利用集论公理(MA+¬ CH)否定了该问题, 即在公理(MA+¬ CH)下, 存在权数为ω_1的可数的序列空间X使得X不是任一具有权数ω_1的度量空间的商映象. 我们对这里出现的几个集合论的概念做简要的说明(Kunen[1980]). 空间 X 的权数是构成 X 的基的最小基数. ¬ CH 是否定连续统假设, 即$\omega_1<2^{\omega}$. MA 是 Martin 公理, MA(κ)是断言: 若<$\mathcal{P}$, ≤>是非空的满足可数链条件的偏序集, $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{P}$ 的基数不超过κ的稠子集族, 则存在 $\mathcal{P}$ 的滤子 G 使得对于每一 D$\in\mathcal{D}$ 有 $G\cap D\neq\varnothing$. MA 是断言: 对于每一$\kappa<2^{\omega}$有 MA(κ)成立. 对于每一$\kappa\geq\omega$, MA(κ)等价于下述纯拓扑的命题: 若 X 是满足可数链条件的紧T_2空间, 并且对于每一$\alpha<\kappa$, U_α是 X 的开稠子集, 则$\bigcap_{\alpha<\kappa}U_\alpha\neq\varnothing$.

从 Svetlichny 的例子及问题 2.3.2, 产生了如下相应的问题: 刻画具有权数κ的度量空间的商映象. Svetlichny[1993]引入了序列基(本节重新定义为序列拟基, 见定义 2.3.3)的概念, 证明了对

于任意基数κ，空间 X 是具有权数κ的度量空间的商映象当且仅当 X 是具有基数κ的序列基，给出了与问题 2.3.2(1)相关的具有确定权数的度量空间商映象的内在特征．问题 2.3.2(2)是 Arhangel’skii[1966]在名著“Mappings and spaces”中提出的，Hoshina[1970]，Gruenhage，Michael 和 Tanaka[1984]都曾给出它的解，Tanaka[1987b]用具有点可数 cs*网的序列空间给出了该问题较好的回答(即，引理 2.1.10)．由此可见，序列基与 cs*网的共同作用之一在于刻画度量空间确定的商映象．受此启发，可以推测序列基与 cs*网这两个概念之间一定存在着某种必然的联系．

本节介绍序列网的概念，建立了它与序列基、cs*网之间较为精确的关系，证明了在一定条件下序列基与 cs*网是相互等价的，进而获得了具有确定权数的度量空间的序列商映象以及度量空间的序列商 s 映象的内在刻画，利用序列网的概念回答了 Arhangel’skii 提出的寻求确定权数的度量空间的商映象以及度量空间的商 s 映象的问题 2.3.2，阐明了一些由特殊的序列网所定义的弱第一可数空间的映射特征，深化了 Sirois-Dumais[1980]、Svetlichny[1993]和 Tanaka[1987b]的已有结果．对于空间 X 的子集族$\mathcal{P}$，记$\mathcal{P}^{\omega}$为$\mathcal{P}$的ω次积．

定义 2.3.3(林寿[1999a])　对于空间 X，设 X 的子集族$\mathcal{P}$满足对于每一 $x\in X$ 存在$\mathcal{P}_x\subset\mathcal{P}^{\omega}$具有性质：如果$(P_n)\in\mathcal{P}_x$，那么$\langle P_n\rangle$是 x 在 X 中递减的网．简记为$\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$．

(1) $\mathcal{P}$称为 X 的序列网，如果 $P\subset X$ 且对于任意的 $x\in P$，$(P_n)\in\mathcal{P}_x$，存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$，则 P 是 X 的序列开集．

(2) $\mathcal{P}$称为 X 的序列拟基，如果 $P\subset X$ 且对于任意的 $x\in P$，$(P_n)\in\mathcal{P}_x$，存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$，则 P 是 X 的开子集．

(3) $\mathcal{P}$称为 X 的 Fréchet 拟基，如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的$(P_n)\in\mathcal{P}_x$，存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$，则 P 是 x 在 X 中的邻域．

我们之所以将满足条件(1)的集族定义为序列网是因为对于任意的空间 X，X 的收敛序列的全体组成的集族构成了 X 的网且满足条件(1)．Svetlichny[1993]称序列拟基为“序列基”，由于$\mathcal{P}$的元一般不是 X 的开子集，所以我们改称“拟基”而不用“基”．Fréchet 拟基是仿照序列拟基及 Fréchet 空间的性质(即，引理 1.4.7)命名的．事实上，序列拟基与 Fréchet 拟基的概念都源于 Sirois-Dumais[1980]定义的弱拟第一可数空间与拟第一可数空间．沿用定义 2.3.3 的记号与术语，设$\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$，称空间 X 是弱拟第一可数的(拟第一可数的)，如果 X 具有序列拟基(Fréchet 拟

基)$\mathcal{P}$使得每一$\mathcal{P}_x$是可数的. 在本节中我们将看到定义这两类空间的目的是作为第一可数空间的推广把它们表示为度量空间确定的商映象.

我们先建立 2.3.3 中定义的几个概念之间的简单联系. 显然, 对于空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$是 X 的第一可数基$\Rightarrow\mathcal{P}$是 X 的 Fréchet 拟基$\Rightarrow\mathcal{P}$是 X 的序列拟基$\Rightarrow\mathcal{P}$是 X 的序列网.

引理 2.3.4 对于空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$. 设 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$, 那么 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网当且仅当如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

证明. 只须证必要性. 设 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是空间 X 的序列网. 如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 往证 P 是 x 在 X 中的序列邻域. 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 假设存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$使得所有的 $x_{n_i}\notin P$. 让 $G=X\setminus\langle x_{n_i}\rangle$, 易验证, 对于任意的 $z\in G$, $(P_n)\in\mathcal{P}_z$, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset G$, 于是 G 是 X 的序列开集, 这与$\{x_{n_i}\}$收敛于 $x\in G$ 相矛盾. 因此, P 含有序列$\{x_n\}$的子序列, 从而 P 是 x 的序列邻域. ∎

引理 2.3.5 (1) 空间 X 是序列空间当且仅当 X 具有序列拟基.

(2) 空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 具有 Fréchet 拟基.

证明. 设 X 是序列(Fréchet)空间, 让 $\mathcal{P}$ 是 X 的所有收敛序列组成的集族, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列(Fréchet)拟基. 反之, 设 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是 X 的序列(Fréchet)拟基. 如果 X 的子集 P 是 X 的序列开集且 $x\in P$(x 在 X 中的序列邻域), 对于任意的$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 若存在 X 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in P_n\setminus P$, 因为$\langle P_n\rangle$是 x 在 X 中递减的网, 所以序列$\{x_n\}$收敛于 x, 这与 P 是 x 的序列邻域相矛盾, 因而存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 于是 P 是 X 的开子集(x 在 X 中的邻域), 由定义 1.2.4(引理 1.4.7), X 是序列(Fréchet)空间. ∎

推论 2.3.6 (1) $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列拟基当且仅当 X 是序列空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

(2) $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是 Fréchet 空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网. ∎

其次, 我们着重讨论序列网与 cs*网之间较为精细的联系. 先介绍下述 Köing 引理, 它的证明出现在 Kodama, Nagami[1974].

引理 2.3.7(Köing 引理) 设$\{X_i\}$是非空的有限集列. 若对于每一 n<m, 存在对应

π_n^m:$X_m \to X_n$满足每一$\pi_n^m = \pi_n^k \circ \pi_k^m$，则存在$(x_i) \in \prod_{i\in N} X_i$使得每一$\pi_n^m(x_m)=x_n$.

证明. 每一集合 X_i 都赋予离散拓扑，则 X_i 是紧空间．置 $X=\prod_{i\in N} X_i$，$Y=\{(x_i)\in X: \pi_n^m(x_m)=x_n,\ n<m\}$，则 Y 是 X 的闭子集．事实上，对于 $y=(y_i)\in X\setminus Y$，存在 n<m 使得 $\pi_n^m(y_m)\neq y_n$，令 $V=\{(x_i)\in X: x_n=y_n, x_m=y_m\}$，则 V 是 X 中包含点 y 的开子集且 $V\cap Y=\varnothing$，故 Y 是 X 的闭子集. 为完成引理的证明，只须说明 $Y\neq\varnothing$．对于每一 $m\in N$，令 $Y_m=\{(x_i)\in X$ ：若 n<m，则$\pi_n^m(x_m)=x_n\}$，于是 Y_m 是 X 的非空闭子集，从而$\{Y_m\}$是 X 的单调递减的闭子集列. 因为 X 是紧空间，所以 $Y=\bigcap_{m\in N} Y_m \neq\varnothing$，故存在$(x_i)\in\prod_{i\in N} X_i$ 使得每一$\pi_n^m(x_m)=x_n$. ▌

定理 2.3.8(林寿[1999a]) (1) 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列网，则 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs*网，则 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

证明. (1) 让 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是空间 X 的序列网. 设 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x 且 G 是 x 在 X 中的开邻域，因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的网，不妨设所有的 $x_n\neq x$. 置 $H=G\setminus\langle x_n\rangle$，则 H 不是 x 在 X 中的序列邻域. 由引理 2.3.4，存在$(P_n)\in\mathcal{P}_x$ 使得对于任意的 $n\in N$ 有 $P_n\not\subset H$，并且存在 $m_0\in N$ 使得 $P_{m_0}\subset G$. 对于每一 $k\geq m_0$，记 $T_k=P_k\cap\langle x_n\rangle$，那么 $T_k\neq\varnothing$．若有 $k_0\geq m_0$使得 T_{k_0} 是有限集，则存在 $m_1>k_0$ 使得 $P_{m_1}\subset X\setminus T_{k_0}$，于是 $T_{m_1}=\varnothing$，矛盾. 从而当 $k\geq m_0$时，T_k 为无限集. 因此，P_{m_0} 含有$\{x_n\}$的子序列且 $P_{m_0}\subset G$，故 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网.

(2) 设 $\mathcal{P}$是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs*网. 对于每一 $x\in X$，置 $\mathcal{P}_x=\{(P_n)\in\mathcal{P}^\omega$ ：$\langle P_n\rangle$是 x 在 X 中递减的网}，则 $\mathcal{P}_x\neq\varnothing$. 设 $x\in P\subset X$，如果对于任意的$(P_n)\in\mathcal{P}_x$，存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$，往证 P 是 x 在 X 中的序列邻域. 设 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x，不妨设所有的 $x_n\neq x$，则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足条件引理 1.3.7 的条件(2)~(4). 记 $\mathcal{P}_n'=\{P'\in\mathcal{P}_n$ ：P'含有$\{x_n\}$的子序列}，那么$\mathcal{P}_n'$非空且$\mathcal{P}_{n+1}'$加细$\mathcal{P}_n'$. 由引理2.3.7，利用加细所产生的函数，对于每一 $n\in N$ 存在 $P_n\in\mathcal{P}_n'$ 使得 $P_{n+1}\subset P_n$. 这时 $x\in P_n$，从而$(P_n)\in\mathcal{P}_x$，于是存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$. 故 P 含有$\{x_n\}$的子序列，所以 P 是 x 的序列邻域. 由引理 2.3.4，$\mathcal{P}$ 是 X 的序列网. ▌

定理 2.3.8 引出的问题是: 若 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的 cs*网, 那么 $\mathscr{P}$ 是否是 X 的序列网? 下面说明该问题的回答是否定的.

定理 2.3.9(林寿[1999a]) 空间 X 是第一可数空间当且仅当若 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的 cs*网, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的序列网.

证明. 设 X 是第一可数空间, $\mathscr{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的 cs*网. 对于每一 $x\in X$, 设 x 在 X 中递减的可数局部基为 $\langle V_{x,n}\rangle$. 置

$$\mathscr{P}_x=\{(P_n)\in\mathscr{P}^{\omega}: x\in P_{n+1}\subset P_n\subset V_{x,n}\}.$$

则 $\mathscr{P}_x\neq\varnothing$ 且对于任意的 $(P_n)\in\mathscr{P}_x$, $\langle P_n\rangle$ 是 x 在 X 中递减的网, 往证 $\mathscr{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathscr{P}_x$ 是 X 的序列网. 如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的 $(P_n)\in\mathscr{P}_x$, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 不妨设所有的 $x_n\neq x$. 由于 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs*网, 存在 $G_1\in\mathscr{P}$ 和 $\langle x_n\rangle$ 的无限子集 Z_1 使得 $cl(Z_1)\subset G_1\subset V_{x,1}$, 于是又存在 $G_2\in\mathscr{P}$ 和 Z_1 的无限子集 Z_2 使得 $cl(Z_2)\subset G_2\subset V_{x,2}$,…. 因此, 我们可以归纳地构造 $\langle x_n\rangle$ 的无限子集列 $\{Z_n\}$ 以及 $(G_n)\in\mathscr{P}^{\omega}$ 使得对于每一 $n\in N$ 有 $cl(Z_{n+1})\subset cl(Z_n)\subset G_n\subset V_{x,n}$. 令 $P_n=\bigcap_{i\le n}G_i$, 则 $(P_n)\in\mathscr{P}_x$, 那么存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 从而 $cl(Z_m)\subset P$, 所以 P 是 x 在 X 中的序列邻域. 由引理 2.3.4, $\mathscr{P}$ 是 X 的序列网.

反之, 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的基, 则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs*网, 于是 $\mathscr{P}$ 是 X 的序列网. 由定义 2.3.3, X 的每一点具有可数的局部基, 所以 X 是第一可数空间. ∎

设 X 是任意的非第一可数的空间, 那么 X 的拓扑是 X 的 cs*网, 由定理 2.3.9, X 的拓扑不是 X 的序列网.

本节的最后一部分利用上面获得的序列网的性质给出度量空间的确定商映象一些新刻画, 特 别地, 刻画了度量空间的序列商映象以及度量空间的序列商 s 映象.

引理 2.3.10 设 $f:X\to Y$ 是序列商映射. 若 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的序列网, 则 $f(\mathscr{P})$ 是空间 Y 的序列网.

证明. 设 $\mathscr{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathscr{P}_x$. 对于每一 $y\in Y$, 记 $\mathscr{H}_y=\{(f(P_n)) : (P_n)\in\mathscr{P}_x, x\in f^{-1}(y)\}$, 则 $\mathscr{H}_y\in f(\mathscr{P})^{\omega}$. 由于 f 的连续性, 如果 $\langle P_n\rangle$ 是 x 在 X 中递减的网, 则 $\langle f(P_n)\rangle$ 是 f(x)在 Y 中递减的网. 设 $H\subset Y$ 且对于任意的 $y\in H$, $(H_n)\in\mathscr{H}_y$, 存在 $m\in N$ 使得 $H_m\subset H$, 那么对于任意的 $x\in f^{-1}(H)$, $(P_n)\in\mathscr{P}_x$, 有 $f(x)\in H$ 且 $(f(P_n))\in\mathscr{H}_{f(x)}$, 所以存在 $m\in N$ 使得 $f(P_m)\subset H$, 于是

$P_m \subset f^{-1}(H)$, 因而 $f^{-1}(H)$是 X 的序列开集. 因为 f 是序列商映射, 由引理 1.4.1, H 是 Y 的序列开集. 故 f($\mathcal{P}$)是 Y 的序列网. ▮

定理 2.3.11(林寿[1999a]) 对于任意基数κ及任意空间X, X具有基数κ的序列网当且仅当X是具有权数κ 的度量空间的序列商映象.

证明. 由引理 2.3.10, 只须证必要性. 不妨设$\kappa \geq \omega$. 设 $\mathcal{P} \approx \bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是空间 X 的基数为κ的序列网. 对于每一$x\in X$, 记$\mathcal{H}_x=\{(H_n)\in\mathcal{P}^{\omega}$: 存在$(P_n)\in\mathcal{P}_x$和$i\in N$使得当$n\geq i$时有$H_n=P_n$且 $x\in\bigcap_{n<i}H_n\}$. 再记 $\mathcal{P}=\{P_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 对于每一 $n\in N$, 让Λ_n是集合Λ赋予离散拓扑的空间. 定义

$$M=\{\beta=(\alpha_n)\in\prod_{n\in N}\Lambda_n : \text{存在}\ x(\beta)\in X\ \text{使得}(P_{\alpha_n})\in\mathcal{H}_{x(\beta)}\}.$$

则M是权数不超过κ的度量空间, 并且对于每一$\beta\in M$, $x(\beta)$是唯一确定的, 于是可以定义函数$f:M\to X$使得$f(\beta)=x(\beta)$. 显然, f是满函数. 设P是X的开子集并且$f((\alpha_n))\in P$, 那么存在$m\in N$使得 $P_{\alpha_m}\subset P$. 置 $W=\{\beta\in M$: β的第 m 个坐标是$\alpha_m\}$. 则 W 是 M 的开子集, $(\alpha_n)\in W$ 且$f(W)\subset P_{\alpha_m}\subset P$, 于是 f 是连续函数. 如果 $P\subset X$ 且 $f^{-1}(P)$是 M 的序列开集, 对于任意的 $x\in P$, $(P_{\alpha_n})\in\mathcal{P}_x$, 有$(\alpha_n)\in f^{-1}(P)$. 因为 $f^{-1}(P)$是 M 的开子集, 存在$\prod_{n\in N}\Lambda_n$的基本开集$\prod_{n\in N}\Gamma_n$使得$(\alpha_n)\in M\cap\prod_{n\in N}\Gamma_n\subset f^{-1}(P)$. 不妨设当$n\leq m$时$\Gamma_n=\{\alpha_n\}$, 当$n>m$时$\Gamma_n=\Lambda_n$. 对于$y\in P_{\alpha_m}$, 取定$(P_{\gamma_n})\in\mathcal{P}_y$, 定义$\gamma=(\tilde{\gamma}_n)\in\prod_{n\in N}\Lambda_n$使得当$n\leq m$时$\tilde{\gamma}_n=\alpha_n$, 当$n>m$时$\tilde{\gamma}_n=\gamma_n$, 那么$(P_{\tilde{\gamma}_n})\in\mathcal{H}_y$, 从而$\gamma\in M\cap\prod_{n\in N}\Gamma_n$, 于是$y=f(\gamma)$, 故$P_{\alpha_m}\subset f(M\cap\prod_{n\in N}\Gamma_n)\subset P$, 所以 P 是 X 的序列开集. 由引理 1.4.1, f 是序列商映射.

以上我们证明了 X是权数不超过κ的度量空间M的序列商映象, 从而X也是与M同胚的κ个空间的拓扑和的序列商映象, 故 X 是权数κ的度量空间的序列商映象. ▮

由推论 2.3.6 和引理 1.4.2, 我们有

推论 2.3.12(Svetlichny[1993]) 对于任意基数κ及任意空间X, X具有基数κ的序列拟基当且仅当 X 是具有权数κ的度量空间的商映象. ▮

由定理 2.3.8 及引理 2.1.10, 我们可以利用序列网给出问题 2.3.2(2)的另一个解.

定理 2.3.13(林寿[1999a]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有点可数的序列网.

(2) X 具有点可数的 cs*网.

(3) X 是度量空间的序列商 s 映象. ▌

推论 2.3.14 (1) 空间 X 具有点可数的序列拟基当且仅当 X 是度量空间的商 s 映象.

(2) 空间 X 具有点可数的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映象. ▌

下面继续用度量空间确定的序列商映象刻画与序列网相关的弱第一可数性.

定义 2.3.15(Svetlichny[1993]) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列网. $\mathcal{P}$ 的扇数定义为 min{ λ : $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$, 对于每一 $x\in X$ 有$|\mathcal{P}_x|\le\lambda$ }. 记 $\mathcal{P}$ 的扇数为 fn($\mathcal{P}$).

空间 X 是弱拟第一可数的(拟第一可数的)(Sirois-Dumais[1980]), 如果 X 具有序列拟基(Fréchet 拟基)$\mathcal{P}$ 使得 fn($\mathcal{P}$)$\le\omega$.

由定义 2.3.15 知, 空间 X 是 snf 可数空间当且仅当 X 具有序列网 $\mathcal{P}$ 使得 fn($\mathcal{P}$)=1, 空间 X 是 gf 可数空间当且仅当 X 具有序列拟基 $\mathcal{P}$ 使得 fn($\mathcal{P}$)=1. 由例 1.5.1 和例 1.5.2 易验证, 序列扇 S_ω 是非 snf 的似第一可数空间, 扇空间 S_{ω_1} 是非弱拟第一可数的 Fréchet 空间, Arens 空间 S_2 是非拟第一可数的 gf 可数空间.

定理 2.3.16(Svetlichny[1993]) 对于任意基数 λ 和空间 X, X 具有扇数不超过 λ 的序列网当且仅当存在度量空间 M 和序列商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le\lambda$.

证明. 设 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是空间 X 的序列网使得每一$|\mathcal{P}_x|\le\lambda$. 对于每一 $x\in X$ 和$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 让 $M_{x,(P_n)}$ 是集合 X 赋予如下拓扑: 以$\langle P_n\rangle$作为 x 的邻域基, X╲{x}的点取为 X 的孤立点. 那么 $M_{x,(P_n)}$ 是具有 σ 离散基的正则空间, 于是 $M_{x,(P_n)}$ 是可度量空间. 定义 $M=\oplus\{M_{x,(P_n)}: x\in X, (P_n)\in\mathcal{P}_x\}$, 则 M 是可度量空间. 让 $f:M\to X$ 是自然映射.

(16.1) f 是连续的. 对于 X 的开子集 U 和 $x\in X$, $(P_n)\in\mathcal{P}_x$. 由于$\langle P_n\rangle$是 x 在 X 中的网, $f^{-1}(U)\cap M_{x,(P_n)}$ 是 M 的开子集, 于是 $f^{-1}(U)$是 M 的开子集, 所以 f 是连续函数.

(16.2) f 是序列商映射. 设 $P\subset X$ 且 $f^{-1}(P)$是 M 的序列开集, 对于任意的 $x\in P$ 和$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 由于 $f^{-1}(P)\cap M_{x,(P_n)}$ 是M的开子集, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 于是P 是 X 的序列开集. 由引理 1.4.1, f 是序列商映射.

(16.3) 对于每一 $x\in X$, $|\partial f^{-1}(x)|\le\lambda$. 由 M的定义知$|\partial f^{-1}(x)|\le|\mathcal{P}_x|\le\lambda$.

反之，设存在度量空间 M 和序列商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le\lambda$. 对于每一 $x\in X$ 和 $z\in f^{-1}(x)$，让$\langle B_n(z)\rangle$是 z 在 M 中递减的局部基. 若 $\partial f^{-1}(x)\ne\varnothing$，记 $\mathcal{P}_x=\{(f(B_n(z))): z\in\partial f^{-1}(x)\}$；若$\partial f^{-1}(x)=\varnothing$，取定 $z\in f^{-1}(x)$，记 $\mathcal{P}_x=\{(f(B_n(z)))\}$. 与引理 2.3.10 类似，易验证 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是 X 的序列网且 $fn(\mathcal{P})\le\lambda$. ∎

由推论 2.3.6 和引理 1.4.2，我们有下述弱第一可数空间的映射刻画.

推论 2.3.17 (1) X 是弱拟第一可数空间当且仅当存在度量空间 M 和商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le\omega$.

(2) X 是拟第一可数空间当且仅当存在度量空间 M 和伪开映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le\omega$.

(3) X 是snf可数空间当且仅当存在度量空间M和序列商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le 1$.

(4) X 是 gf 可数空间当且仅当存在度量空间 M 和商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le 1$. ∎

问题 2.3.18 设空间 X 具有点可数弱基，是否存在度量空间 M 和商 s 映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le 1$?

2.4 cs 网、sn 网与序列覆盖映射

空间的集族性质与适当的映射类是相互匹配的，如点可数集族对应 s 映射，cs*网对应序列商映射. 引理 2.1.10 就是这种匹配的范例. 本节介绍几类与 cs 网相关的空间与度量空间上序列覆盖映射匹配的结果. 1971 年 Guthrie[1971]为刻画$\aleph_0$空间引入了 cs 网的概念，1971 年 Siwiec[1971]定义了序列覆盖映射获得了序列空间和Fréchet空间的函数形式特征. 1972 年Strong[1972]证明了具有可数 cs 网的空间可以刻画为可分度量空间的序列覆盖映象. 而对于具有点可数弱基的空间，Hoshina[1970]在研究度量空间的商 s 映象的特征时曾试图解决下述问题.

问题 2.4.1 具有点可数弱基的空间可刻画为度量空间在怎样的映射下的象？

这些结果与问题激发了对于序列覆盖映射的进一步探讨及 1 序列覆盖映射与 2 序列覆盖映射的引入(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]; 林寿[1996c]; 林寿, 刘川[1996]; 林寿, 燕鹏飞[2001a, 2001b];

刘川, Tanaka[1998a]; Tanaka[1991]; Tanaka, 夏省祥[1996]; 夏省祥[2000]). 本节介绍度量空间的序列覆盖(或 1 序列覆盖, 2 序列覆盖)映象和 s 映象的特征, 特别地, 利用 1 序列覆盖的商 s 映射回答了问题 2.4.1, 建立了序列覆盖映射与开映射的一些初步关系.

与问题 2.2.12 相关, 对于 cs 网、sn 网和 so 网相应的问题有肯定的回答.

定理 2.4.2 每一正则空间是具有点可数 so 网的完全正则空间的完备映象.

Woods[1979]应用布尔代数中的 Stone 空间理论证明了每一正则空间是某一极不连通(extremally disconnected)空间的完备映象, 而极不连通空间是具有点可数 so 网的完全正则空间(Gleason[1958]), 于是定理 2.4.2 是 Woods 定理的推论. 这里我们给出将空间加强为完全正则空间时 Tanaka 的简单证明.

证明. 设 X 是完全正则空间. 让 D 是集合 X 赋予离散拓扑的空间, f: $D\to\beta X$ 是嵌入映射, $h=\beta f$: $\beta D\to\beta X$ 是 f 的唯一扩张, 则 h 是完备映射. 让 $E=\{z\in\beta D : h(z)\in X\}$, $g=h_{|E}: E\to X$, 则 E 是完全正则空间且 g 是完备映射. 由于 βD 中不存在非平凡的收敛序列, 所以 E 中也不存在非平凡的收敛序列, 令 $\mathcal{P}=\{\{z\} : z\in E\}$, 则 $\mathcal{P}$ 是 E 的点可数 so 网, 于是 X 是具有点可数 so 网的完全正则空间的完备映象. █

由此, 完备映射不保持具有点可数 cs 网的空间.

定理 2.4.3(林寿[1996b]) 空间 X 是度量空间的序列覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 cs 网.

证明. 设存在度量空间 M 和序列覆盖 s 映射 f:$M\to X$. 让 $\mathcal{B}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 那么 $\{f(B) : B\in\mathcal{B}\}$是空间 X 的点可数 cs 网.

反之, 设空间 X 具有点可数 cs 网 $\mathcal{P}$. 记 $\mathcal{P}=\{P_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 让(f, M, X, $\mathcal{P}$)为 Ponomarev 系, 由引理 1.3.8, f:$M\to X$ 是 s 映射. 我们要证明 f 是序列覆盖映射. 对于 X 中收敛于点 x_0 的序列 $\{x_n\}$, 不妨设所有 x_n 是互不相同的. 让 $K=[x_n]$, 并且设 U 是 X 中任一包含 K 的开子集, 称 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 具有性质 F(K, U), 如果 $\mathcal{F}$ 满足

(3.1) 对于每一 $P\in\mathcal{F}$, 有 $\varnothing\neq P\cap K\subset P\subset U$.

(3.2) 对于每一 $z\in K$, 存在唯一的 $P_z\in\mathcal{F}$ 使得 $z\in P_z$.

(3.3) 若 $x_0\in P\in\mathcal{F}$, 那么 $K\setminus P$ 是有限的.

由于$\mathcal{P}$是X的cs网，具有性质F(K, U)的$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$是存在的. 置{$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{\omega}$ ：$\mathcal{F}$具有性质F(K, X)}=<$\mathcal{F}_i$>. 对于每一 $i\in N$ 和 $m\in\omega$，存在唯一的$\alpha_{im}\in\Lambda$使得 $x_m\in P_{\alpha_{im}}\in\mathcal{F}_i$. 让$\beta_m=(\alpha_{im})\in\Lambda^{\omega}$，则

(3.4) $f(\beta_m)=x_m$.

(3.5) $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta_0$.

事实上, 设V是x_m在X中的开邻域. 如果m=0, 令$L=K\cap V$, 那么存在$\mathcal{F}'\in\mathcal{P}^{\omega}$具有性质F(L, V), 而$K\setminus L$是有限集, 可以取定$\mathcal{P}$的基数为$|K\setminus L|$的子集族$\mathcal{F}''$满足: 对于每一$z\in K\setminus L$, 存在唯一的$P\in\mathcal{F}''$使得$z\in P\subset X\setminus L$. 置$\mathcal{F}=\mathcal{F}'\cup\mathcal{F}''$, 则$\mathcal{F}$具有性质F(K, X), 于是存在$i\in N$使得$\mathcal{F}=\mathcal{F}_i$，从而$x_0\in P_{\alpha_{i0}}\subset\cup\mathcal{F}'$, 因此$x_0\in P_{\alpha_{i0}}\subset V$. 如果m>0, 则存在$\mathcal{F}^*\in\mathcal{P}^{<\omega}$具有性质F(K$\setminus\{x_m\}$, X$\setminus\{x_m\}$)和$P\in\mathcal{P}$使得$x_m\in P\subset V\setminus(K\setminus\{x_m\})$, 那么$\{P\}\cup\mathcal{F}^*$具有性质F(K, X), 于是存在$j\in N$ 使得$\mathcal{F}_j=\{P\}\cup\mathcal{F}^*$, 从而$x_m\in P_{\alpha_{jm}}=P\subset V$. 故{$P_{\alpha_{im}}$ ：$i\in N$}是x_m在X中的网, 所以$\beta_m\in M$且$f(\beta_m)=x_m$. (3.5)等价于对于每一$i\in N$在Λ中有$\lim_{n\to\infty}\alpha_{in}=\alpha_{i0}$ 由于{α_{in} ：$n\in N$}是有限集, 从(3.2)和(3.3)知, 存在 $n_i\in N$ 使得当 $n\ge n_i$时有$\alpha_{in}=\alpha_{i0}$，所以 $\lim_{n\to\infty}\alpha_{in}=\alpha_{i0}$，故$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta_0$.

这表明f是序列覆盖s映射. █

由引理1.4.2和引理1.4.3, 我们可将Strong[1972]关于可数cs网的结果推广为点可数cs网的情形.

推论2.4.4 空间X是度量空间的序列覆盖的商s映象当且仅当X是具有点可数cs网的序列空间. █

下面转入回答问题2.4.1.

引理2.4.5 设$f:X\to Y$. 如果<B_n>是X中某点x的递减的网且每一$f(B_n)$是f(x)在Y中的序列邻域. 若在Y中序列{y_n}收敛于f(x), 那么存在$x_n\in f^{-1}(y_n)$使得在X中序列{x_n}收敛于x.

证明. 对于每一 $n\in N$, 由于 $f(B_n)$是 f(x)的序列邻域, 存在 $i_n\in N$ 使得当 $i\ge i_n$时有$y_i\in f(B_n)$, 那么$f^{-1}(y_i)\cap B_n\ne\varnothing$. 不妨设$1<i_n<i_{n+1}$. 对于$j\in N$, 置

$$x_j \in \begin{cases} f^{-1}(y_j), j < i(1), \\ f^{-1}(y_j) \cap B_n, i_n \le j < i_{n+1}, n \in N, \end{cases}$$

那么 $x_j \in f^{-1}(y_j)$，且在 X 中序列$\{x_j\}$收敛于 x. ■

定理 2.4.6(林寿[1996c]) 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 sn 网.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数 sn 网. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 让$(f, M, X, \mathcal{P})$为 Ponomarev 系，由引理 1.3.8，$f:M \to X$ 是 s 映射，往证 f 是 1 序列覆盖映射. 对于每一 $x \in X$，设 $\mathcal{P}$ 的子集族$\langle P_{\alpha_i} \rangle$是 x 在 X 中的序列邻域网，记 $\beta=(\alpha_i) \in \Lambda^\omega$，那么 $\beta \in f^{-1}(x)$. 对于每一 $n \in N$，置 $B_n=\{(\gamma_i) \in M$：对于 $i \le n$ 有$\gamma_i=\alpha_i\}$，那么$\langle B_n \rangle$是β在 M 中递减的邻域基，且 $f(B_n)=\bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$. 事实上，设$\gamma=(\gamma_i) \in B_n$，那么 $f(\gamma) \in \bigcap_{i \in N} P_{\gamma_i} \subset \bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$，所以 $f(B_n) \subset \bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$. 再设 $z \in \bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$，选取 $\mathcal{P}$ 的子集族$\langle P_{\delta_i} \rangle$使得$\langle P_{\delta_i} \rangle$是点 z 在 X 中的网且当 $i \le n$ 时有$\delta_i=\alpha_i$，令$\delta=(\delta_i) \in \Lambda^\omega$，那么 $z=f(\delta) \in f(B_n)$，于是$\bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i} \subset f(B_n)$，故 $f(B_n)=\bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$. 现在，设 X 中的序列$\{x_j\}$收敛于 x，由于 $f(B_n)$是 x 的序列邻域，再由引理 2.4.5，存在$\beta_j \in f^{-1}(x_j)$使得在 M 中序列$\{\beta_j\}$收敛于β，从而 f 是 1 序列覆盖映射.

反之，设 M 是度量空间且 $f:M \to X$ 是 1 序列覆盖的 s 映射，让$\mathcal{B}$是 M 的σ 局部有限基. 对于每一 $x \in X$，存在$\beta_x \in f^{-1}(x)$满足定义 1.2.3(6)中 1 序列覆盖映射的条件. 置 $\mathcal{P}_x=\{f(B) : \beta_x \in B \in \mathcal{B}\}$，$\mathcal{P}=\bigcup_{x \in X} \mathcal{P}_x$，则可直接验证$\mathcal{P}$是 X 的点可数 sn 网. ■

由引理 1.4.2，引理 1.4.3 和引理 1.4.6，我们有下述推论，它回答了问题 2.4.1.

推论 2.4.7 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 s 映象当且仅当 X 具有点可数弱基. ■

对于度量空间的 2 序列覆盖 s 映象的特征，我们需要下述引理.

引理 2.4.8 设 $f:X \to Y$，考虑下述条件:

(1) f 是 2 序列覆盖映射.

(2) 对于 $x \in P \subset X$，若 P 是 x 的序列邻域，那么 f(P)是 f(x)的序列邻域.

(3) 若 P 是 X 的序列开集，那么 f(P)是 Y 的序列开集.

则(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3). 若 X 是第一可数空间，则(3)$\Rightarrow$(1).

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 对于 $x\in P\subset X$, 若 P 是 x 的序列邻域, 设 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 f(x), 由(1), 存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$, 于是$\{x_n\}$是终于 P 的, 从而$\{y_n\}$是终于 f(P)的. 故 f(P)是 f(x)的序列邻域.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 P 是 X 的序列开集, 对于每一 $y\in f(P)$, 存在 $x\in P$ 使得 f(x)=y, 由(2), f(P)是 y 的序列邻域, 于是 f(P)是 Y 的序列开集.

设 X 是第一可数空间, 由条件(3), 引理 2.4.5 及定义 1.2.3(7)知(3)$\Rightarrow$(1). ∎

沿用定理 2.4.6 和推论 2.4.7 的证明方法, 利用引理 2.4.8 有

定理 2.4.9(林寿[1996c]) (1) 空间 X 是度量空间的 2 序列覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 so 网.

(2) 空间 X 是度量空间的 2 序列覆盖的商 s 映象当且仅当 X 具有点可数基. ∎

我们对于度量空间的 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)的 s 映象有了较好的刻画, 那么度量空间的 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)映象又有怎样的内在特征?

下述引理可直接验证.

引理 2.4.10 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 都是 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)映射, 那么 $gf:X\to Z$ 也是 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)映射. ∎

定理 2.4.11(林寿, 燕鹏飞[2001b]) 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)映象当且仅当 X 是 snf 可数(或 sof 可数)空间.

证明. 仅证 1 序列覆盖映射的情形, 2 序列覆盖映射的情形是类似的.

设 $f:M\to X$ 是 1 序列覆盖映射, 其中 M 是度量空间. 对于每一 $x\in X$, 存在 $\beta_x\in f^{-1}(x)$满足定义 1.2.3(6). 让$\mathcal{B}_x$是 β_x 在 M 中的可数局部基, 令$\mathcal{P}_x=f(\mathcal{B}_x)$, 则$\mathcal{P}_x$是 x 在 X 中的可数 sn 网. 故 X 是 snf 可数空间.

反之, 设 X 是 snf 可数空间, 让$\mathcal{P}$是使得 X 是 snf 可数空间的 X 的 sn 网. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 让(f, M, X, $\mathcal{P}$)为 Ponomarev 系, 由引理 1.3.8, $f:M\to X$ 是映射, 从定理 2.4.6 的证明知 f 是 1 序列覆盖映射. ∎

由引理 1.4.6, 引理 1.4.2, 引理 1.4.3 和定理 2.4.11 有

推论 2.4.12 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖(2 序列覆盖)的商映象当且仅当 X 是 gf 可数(第一可数)空间. ∎

推论 2.4.13　(1) 1 序列覆盖映射保持 snf 可数空间.

(2) 1 序列覆盖的商映射保持 gf 可数空间.

(3) 2 序列覆盖映射保持 sof 可数空间.

(4) 2 序列覆盖的商映射保持第一可数空间. █

注记 2.4.14　从定理 2.4.11, 认为“空间 X 是度量空间的序列覆盖映象当且仅当 X 是 csf 可数空间”是很自然的. 但这是不正确的. 一方面, 任何空间都是某一度量空间的序列覆盖映象. 事实上, 设 X 是一空间, 让 M=$\oplus$\{S : S 是 X 的含极限点的收敛序列\}, 则 M 是度量空间且从 M 到 X 上的自然映射是序列覆盖映射. 另一方面, 由于扇空间 S_{ω_1} 恰有一个非孤立点, 若 S_{ω_1} 在非孤立点处具有可数 cs 网, 那么 S_{ω_1} 自身就具有点可数 cs 网, 但由例 1.5.2, S_{ω_1} 不具有点可数 cs 网, 所以 S_{ω_1} 不是 csf 可数空间.

从定义 1.2.3 可见, 序列覆盖映射、1 序列覆盖映射及 2 序列覆盖映射都具有一种所谓的收敛序列的“拉回”性质, 而开映射具有收敛序列的“拉回”性质早已为人们所重视并发挥了积极的作用. 1935 年 Eilenberg[1935]证明了下述性质: 设 $f:X\to Y$ 是开映射, X 和 Y 是紧度量空间, 那么 f 是开映射当且仅当如果在 Y 中序列$\{y_n\}$收敛于 y, 则在超空间 2^X 中序列$\{f^{-1}(y_n)\}$收敛于点 $f^{-1}(y)$(Nadler[1992], 定理 13.5]). Nadler[1992]的著作表明 Eilenberg 的定理被应用于连续统的分解结构. 1971 年 Siwiec[1971]叙述了第一可数空间上的开映射是序列覆盖映射. 1991 年恽自求[1991]实际上证明了具有点 G_δ 性质的正则空间上的开闭映射是序列覆盖映射, 并由此导出开闭映射保持正则的$\aleph$空间性质. 本节的最后一个定理将进一步揭示开映射, 几乎开映射与 2 序列覆盖, 1 序列覆盖映射的关系.

定理 2.4.15(林寿[2000a])　设 $f:X\to Y$. 若 X 是第一可数空间, 那么

(1) f 是开映射当且仅当 f 是 2 序列覆盖的商映射.

(2) f 是几乎开映射当且仅当 f 是 1 序列覆盖的伪开映射.

证明. (1)是引理 2.4.8 的推论. 我们证明(2)成立. 设 f 是几乎开映射. 显然, f 是伪开映射. 对于每一 $y\in Y$ 及 $x\in f^{-1}(y)$满足定义 1.2.2(6)的要求. 由于 X 是第一可数空间, 让$\langle B_n\rangle$是 x 在 X 中递减的局部基, 那么$\langle f(B_n)\rangle$是 y 在 Y 中递减的邻域基. 由引理 2.4.5, 如果 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y, 那么存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$, 所以 f 是 1 序列覆盖映射.

反之，设 f 是 1 序列覆盖的伪开映射. 对于每一 $y\in Y$，存在 $x\in f^{-1}(y)$满足定义 1.2.3(6)的要求. 如果 U 是 x 在 X 中的邻域，我们要证明 f(U)是 y 在 Y 中的邻域. 对于 Y 中收敛于 y 的序列$\{y_n\}$，存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$，于是序列$\{x_n\}$是终于 U 的，从而序列$\{y_n\}$是终于 f(U)的，因此 f(U)是 y 的序列邻域. 由于 X 是第一可数空间，所以 Y 是 Fréchet 空间，由引理 1.4.7, f(U)是 y 的邻域，于是 f 是几乎开映射. ∎

问题 2.4.16(Tanaka[1993]) 开映射是否保持 gf 可数空间?

2.5 cfp 网与紧覆盖映射

Michael 和 Nagami[1973]对于度量空间的紧覆盖映射进行了系统的研究，证明了空间 X 是度量空间的开 s 映象当且仅当 X 是度量空间的紧覆盖的开 s 映象，提出了下述问题

问题 2.5.1 度量空间的商 s 映象是否也是度量空间的紧覆盖的商 s 映象?

从文献陈怀鹏[1999]; Debs, Raymond[1996, 1999]; Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]; Just, Wicke[1994]; 林寿[1998a]; Michael[1990]可见，问题 2.5.1 诱导了紧覆盖映射、序列覆盖映射、诱导完备映射等映射理论，点可数覆盖理论，集论拓扑等课题的发展，现已成为一般拓扑学的著名问题而激发很多有趣的工作. Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]证明了度量空间的商 s 映象是度量空间的伪序列覆盖的商 s 映象(推论 1.3.9). 陈怀鹏[1999]否定地回答了问题 2.5.1.

例 2.5.2(陈怀鹏[1999]) 存在局部可分度量空间的商紧映象 X 使得 X 不是任一度量空间的紧覆盖的商 s 映象.

让 $Q'=I\cap Q$, $R_1\cup R_2=I\setminus Q'$使得 $R_1\cap R_2=\varnothing$ 且 R_i (i=1,2)在 I 中是 c 稠密的. 令 $M_1=(R_1\times\{1, 1/2, 1/3, \ldots\})\cup((R_1\cup R_2)\times\{0\})$赋予$I^2$的子空间拓扑. 对于每一$r\in R_2$，令 $S_r=\{r\}\times\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$, $M_2=\oplus\{S_r\cup\{(r, 0)\}: r\in R_2\}$，那么 M_2 是局部紧的度量空间. 令 $M_3=\oplus\{I\times\{1/n\}: n\in N\}$，则 M_3也是局部紧的度量空间. 再令 $M=M_1\oplus M_2\oplus M_3$，则 M 是局部可分的度量空间. 让$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$是 M 的$\sigma$局部有限基且满足

(2.1) 如果 $B\in\mathscr{B}$，则存在 $k\in\{1, 2, 3\}$使得 $B\subset M_k$.

(2.2) 如果 $B\subset M_2$，则存在 $r\in R_2$ 使得 $B\subset S_r\cup\{(r, 0)\}$.

(2.3) 如果 $B\subset M_3$, 则存在 $n\in N$ 使得 $B\subset I\times\{1/n\}$.

置集合 $X=I^2\setminus(Q'\times\{0\})$. 让 $g:M\to X$ 是显然映射, $\mathcal{P}=g(\mathcal{B})$. 定义 X 的拓扑如下: $U\subset X$ 是 X 的开子集当且仅当对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $P\cap U$ 是 P 的开子集, 即 X 关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑. 这时, X 是非正则的 T_2 空间, X 是局部可分度量空间 M 的商紧映象, 但是 X 不是任一度量空间的紧覆盖的商 s 映象. ▌

既然度量空间的商 s 映象未必是度量空间的紧覆盖的商 s 映象, 寻求度量空间的紧覆盖的商 s 映象的内在刻画具有特别的意义. 这比度量空间的商 s 映象的内在刻画要复杂和困难的多. 1977 年 Michael[1977]证明了具有点可数闭 k 网的 k 空间是度量空间的紧覆盖的商 s 映象; 1996 年林寿[1996b]证明了具有点可数 cs 网的序列空间是度量空间的紧覆盖的商 s 映象; 1996 年刘川和戴牧民[1996]引入强 k 网的概念(定义 2.5.3(2)), 给出了度量空间的紧覆盖的商 s 映象第一个刻画: 空间 X 是度量空间的紧覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数强 k 网的 k 空间. 但强 k 网因形式较为复杂难以进一步发挥作用, 而上述列举的闭 k 网或 cs 网的条件又都严格强于度量空间的紧覆盖的商 s 映象中所需要的集族性质, 所以用弱于闭 k 网和 cs 网且较为简单的概念来代替强 k 网条件应是回答上述问题的方向之一. 为此, 燕鹏飞和林寿[1999b]引入了 cfp 网的概念作为闭 k 网、cs 网和强 k 网的深化, 证明了一个空间是度量空间的紧覆盖 s 映象当且仅当它是具有点可数的 cfp 网的空间, 这不仅仅给出了度量空间的紧覆盖的商 s 映象一个较为简单的内在刻画, 同时可导出关于度量空间的 s 映象研究方面的系列结论. 本节介绍这方面的一些结果.

定义 2.5.3(燕鹏飞[1997]) 设 K 是空间 X 的子集. 若 $\mathcal{F}$ 是 K 在 X 中的有限覆盖且被 K 的紧子集组成的有限覆盖一一加细, 则称 $\mathcal{F}$ 是 K 的 cfp 覆盖.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1)(燕鹏飞[1997]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧有限分解, 若对于 X 中的每个紧子集 K, 存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathcal{P}'$ 是 K 的 cfp 覆盖.

(2)(刘川, 戴牧民[1996]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的强 k 网, 若对于 X 中的每个紧子集 K, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子族 $\mathcal{P}(K)$满足: 对于 K 的任意紧子集 L 及 X 中包含 L 的开子集 V, 存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}(K)^{<\omega}$ 使得 $\mathcal{P}'$是 L 的 cfp 覆盖且 $\cup\mathcal{P}'\subset V$.

(3)(燕鹏飞, 林寿[1999b]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧有限分解网, 若对于 X 中的每个紧子集 K 及包含 K 的开子集 V, 存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathcal{P}'$是 K 的 cfp 覆盖且 $\cup\mathcal{P}'\subset V$.

空间 X 的紧有限分解网简记为 X 的 cfp 网.

上述一系列概念的出发点是紧有限分解. 这是燕鹏飞[1997]为获得度量空间的紧覆盖紧映象而引入的. 显然, 空间的闭 k 网或强 k 网都是 cfp 网, cfp 网是 cs*网和 k 网. 为进一步说明它们之间的关系, 下述关于点可数覆盖的 cfp 性质与著名的 Miščenko 引理(引理 1.3.6)类似. 对于空间 X 的子集 H 及 H 的 cfp 覆盖 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ 称为 H 的极小 cfp 覆盖, 若对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $\mathcal{P}\setminus\{P\}$不是 H 的 cfp 覆盖.

引理 2.5.4(燕鹏飞, 林寿[1999b])　如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数覆盖, 那么 X 的每一非空紧子集仅有至多可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的极小 cfp 覆盖.

证明. 设 K 是空间 X 的非空紧子集且$\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是由 $\mathcal{P}$ 的元组成 K 的极小 cfp 覆盖全体. 若引理不成立, 则存在 $n\in N$ 使得集族 $\mathcal{R}=\{\mathcal{P}_\alpha: \alpha\in\Lambda, |\mathcal{P}_\alpha|=n\}$是不可数的. 对于 $P\in\mathcal{P}$, 令 $\mathcal{R}(P)=\{\mathcal{P}_\alpha : P\in\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}\}$. 取 $x_1\in K$, 则 $\mathcal{R}=\cup\{\mathcal{R}(P) : x_1\in P\in\mathcal{P}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是点可数的, 于是存在 $P_1\in\mathcal{P}$ 使得 $x_1\in P_1$且满足$|\mathcal{R}(P_1)|>\omega$. 若 n=1, 则$|\mathcal{R}(P_1)|=1$, 矛盾, 故 n>1. 设 $\mathcal{R}(P_1)=\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda_1\}$, 其中每一$\mathcal{P}_\alpha=\{P_{\alpha i} : i\le n\}$被 K 的紧子集组成的有限覆盖$\mathcal{F}_\alpha=\{F_{\alpha i} : i\le n\}$一一加细且 $P_{\alpha 1}=P_1$. 我们先证明$\{\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i} : \alpha\in\Lambda_1\}$具有有限交性质. 任取$\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha\in\Lambda_1\}$的有限子族$\{\mathcal{F}_{\beta_j} : j\le m\}$, 则有$\bigcup_{j\le m}F_{\beta_j 1}\subset P_1$, 由于 $\mathcal{P}_{\beta_j}$ 是 K 的极小 cfp 覆盖, 因而存在 $x\in K\setminus\bigcup_{j\le m}F_{\beta_j 1}$, 故 $x\in\bigcap_{j\le m}(\bigcup_{2\le i\le n}F_{\beta_j i})$, 所以集族$\{\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i} : \alpha\in\Lambda_1\}$具有有限交性质, 于是它具有非空的交. 取 $x_2\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda_1}(\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i})$. 令 $\mathcal{R}(P_1, P)=\{\mathcal{P}_\alpha : P\in\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}(P_1)\}$, 则 $\mathcal{R}(P_1)=\cup\{\mathcal{R}(P_1, P) : x_2\in P\in\mathcal{P}\}$. 事实上, 任取 $\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}(P_1)$, 由于 $x_2\in\bigcup_{2\le i\le n}F_{\alpha i}$, 存在 $1\le i_0\le n$ 使得 $x_2\in F_{\alpha i_0}\subset P_{\alpha i_0}$, $P_{\alpha i_0}\ne P_1$且 $\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}(P_1, P_{\alpha i_0})$. 因此, 存在 $P_2\in\mathcal{P}$ 使得 $x_2\in P_2$, $P_2\ne P_1$ 且$|\mathcal{R}(P_1, P_2)|>\omega$. 重复上述过程, 可得到点集$\{x_i\}_{i\le n}$及集族$\{P_i\}_{i\le n}$满足: 每一 $x_i\in P_i\in\mathcal{P}$, 当 $i\ne j$ 时 $P_i\ne P_j$ 且$|\mathcal{R}(P_1, P_2,\ldots, P_n)|>\omega$, 但是$|\mathcal{R}(P_1, P_2,\ldots, P_n)|=1$, 矛盾. 故, 由 $\mathcal{P}$ 的元组成 K 的极小 cfp 覆盖至多是可数的. ∎

下面几个引理说明了 cfp 网与 cs 网、强 k 网的关系.

引理 2.5.5　若空间 X 的每一紧子集是序列紧的, 则 X 的点可数 cs 网也是 X 的 cfp 网.

证明. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs 网, K 是 X 的紧子集, V 是 X 中包含 K 的开子集. 由引理

2.1.6 和推论 2.1.4, K 是第一可数的. 对于每一 $x\in K$, 设$\langle V_n\rangle$是 x 在 K 中递减的局部基. 置$\mathcal{F}=\{P\cap K: P\in\mathcal{P}, P\subset V$ 并且存在 $n\in N$ 使得 $V_n\subset P\cap K\}$, 那么$\mathcal{F}$是 x 在 K 中的邻域族. 由推论 2.1.12(1)所证, $\mathcal{F}$是 x 在 K 中的网, 从而$\mathcal{F}$是 x 在 K 中的邻域基, 于是存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_K(F)$, 即存在 $P_x\in\mathcal{P}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_K(P_x\cap K)\subset P_x\subset V$, 因此存在 K 的开子集 V_x 使得 $x\in V_x\subset \mathrm{cl}(V_x)\subset \mathrm{int}_K(P_x\cap K)$. 这时 K 的开覆盖$\{V_x: x\in K\}$存在有限的子覆盖$\{V_{x_i}: i\le n\}$, 于是 $K=\bigcup_{i\le n}\mathrm{cl}(V_{x_i})$且每一 $\mathrm{cl}(V_{x_i})\subset P_{x_i}$. 让$\mathcal{P}'=\{P_{x_i}: i\le n\}$, 则$\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$, $\mathcal{P}'$是 K 的 cfp 覆盖且$\cup\mathcal{P}'\subset V$, 故$\mathcal{P}$是 X 的 cfp 网. ▌

引理 2.5.6 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数覆盖, 若$\mathcal{P}$是 X 的 cfp 网, 则$\mathcal{P}$也是 X 的强 k 网.

证明. 设K是X的非空紧子集. 由引理2.5.4, 记由$\mathcal{P}$的元组成K的极小cfp覆盖族为$\mathcal{F}=\langle\mathcal{P}_i\rangle$, 令$\mathcal{P}(K)=\cup\mathcal{F}$, 则$\mathcal{P}(K)$是$\mathcal{P}$的可数子族. 对于 K 的任意非空紧子集 L 及 X 中包含 L 的开子集 V, 存在L 在 K 中的开邻域 W 使得 $\mathrm{cl}_K(W)\subset V$, 于是存在$\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$\mathcal{P}'$是 $\mathrm{cl}_K(W)$的 cfp 覆盖且$\cup\mathcal{P}'\subset V$. 由于紧集$K\setminus W\subset X\setminus L$, 又存在$\mathcal{P}''\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$\mathcal{P}''$是$K\setminus W$的 cfp 覆盖且$\cup\mathcal{P}''\subset X\setminus L$. 令$\mathcal{P}^*=\mathcal{P}'\cup\mathcal{P}''$, 则$\mathcal{P}^*$是 K 的 cfp 覆盖, 从而存在 $k\in N$ 使得$\mathcal{P}_k\subset\mathcal{P}^*$. 设$\mathcal{P}_k=\{P_i: i\le n\}$被 K 的紧子集组成的有限覆盖$\{F_i: i\le n\}$一一加细, 让$\mathcal{R}=\{P_i\in\mathcal{P}_k: F_i\cap L\ne\varnothing\}$, 那么$\mathcal{R}$是 L 的 cfp 覆盖且$\cup\mathcal{R}\subset V$, 所以$\mathcal{P}$是 X 的强 k 网. ▌

引理 2.5.7(燕鹏飞, 林寿[1999b]) 具有点可数 cfp 网的空间是度量空间的紧覆盖 s 映象.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数 cfp 网. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$. 让$(f, M, X, \mathcal{P})$为 Ponomarev 系, 由引理 1.3.8, $f:M\to X$ 是 s 映射, 下面证明 f 是紧覆盖映射.

设 K 的 X 的非空紧子集. 由引理 2.5.4, 记由$\mathcal{P}$的元组成 K 的极小 cfp 覆盖族为$\mathcal{F}=\langle\mathcal{P}_i\rangle$, 其中每一$\mathcal{P}_i=\{P_\alpha: \alpha\in\Gamma_i\}$被 K 的紧子集组成的有限覆盖$\mathcal{F}_i=\{F_\alpha: \alpha\in\Gamma_i\}$一一加细. 置 $L=\{(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i: \bigcap_{i\in N}F_{\alpha_i}\ne\varnothing\}$. 那么

(7.1) L 是紧子集$\prod_{i\in N}\Gamma_i$的闭子集, 从而 L 是Λ^ω的紧子集.

设$\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i\setminus L$, 则$\bigcap_{i\in N}F_{\alpha_i}=\varnothing$, 从而存在$i_0\in N$ 使得$\bigcap_{i\le i_0}F_{\alpha_i}=\varnothing$, 令

W={$(\beta_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i$: 对于$i\le i_0$有$\beta_i=\alpha_i$}, 则 W 是$\Pi_{i\in N}\Gamma_i$中含有点α的开子集且 W∩L=∅.

(7.2) L⊂M 且 f(L)⊂K.

设$\alpha=(\alpha_i)\in$L. 取定 x$\in\bigcap_{i\in N}F_{\alpha_i}$, 如果我们证明了<$P_{\alpha_i}$>是 x 在 X 中的网, 那么$\alpha\in$M 且 f($\alpha$)=x∈K, 于是有 L⊂M 且 f(L)⊂K. 设 V 是 x 在 X 中的开邻域, 则存在 x 在 K 中的开邻域 W 使得 cl_K(W)⊂V, 于是存在 $\mathcal{P}$'∈$\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathcal{P}$'是 cl_K(W)的 cfp 覆盖且∪$\mathcal{P}$'⊂V. 由于紧集 K\W⊂X\{x}, 又存在 $\mathcal{P}$"∈$\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得$\mathcal{P}$"是 K\W 的 cfp 覆盖且∪$\mathcal{P}$"⊂X\{x}. 令 $\mathcal{P}$*=$\mathcal{P}$'∪$\mathcal{P}$", 则 $\mathcal{P}$*是 K 的 cfp 覆盖, 于是存在 k∈N 使得 $\mathcal{P}_k$ ⊂$\mathcal{P}$*. 因为 x∈F_{α_k} ⊂P_{α_k} ∈$\mathcal{P}_k$, 所以 P_{α_k} ∈$\mathcal{P}$', 故 P_{α_k} ⊂V, 从而<P_{α_i}>是 x 在 X 中的网.

(7.3) K⊂f(L).

设 x∈K, 对于每一 i∈N, 存在$\alpha_i\in\Gamma_i$使得 x∈F_{α_i}, 令$\alpha=(\alpha_i)$, 则$\alpha\in$L 且由(7.2)所证知 f(α)=x, 因此 K⊂f(L).

综上所述, f 是紧覆盖 s 映射. ▌

由于闭 k 网是 cfp 网, 所以有

推论 2.5.8(Michael[1977])　若 X 是具有点可数闭 k 网的空间(k 空间), 则 X 是度量空间的紧覆盖(商)s 映象. ▌

推论 2.5.9(林寿[1996b])　空间 X 是度量空间的紧覆盖, 序列覆盖的 s 映象当且仅当 X 具有点可数 cs 网且 X 的每一紧子集是可度量的.

证明. 必要性由定理 2.4.3, 而充分性由引理 2.5.5, 引理 2.5.7 和定理 2.4.3. ▌

定理 2.5.10(燕鹏飞, 林寿[1999b])　对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的紧覆盖 s 映象.

(2) X 具有点可数的 cfp 网.

(3) X 具有点可数的强 k 网.

证明. 由引理 2.5.6 和引理 2.5.7 知(3)⇔(2)⇒(1). 设空间 X 是度量空间 M 在紧覆盖 s 映射 f 下的象. 让 $\mathcal{P}$ 是 M 的σ局部有限基, 则 $\mathcal{P}$ 是 M 的 cfp 网. 由于 f 是紧覆盖的 s 映射, 于是 f($\mathcal{P}$)是空间 X 的点可数的 cfp 网. 故(1)⇒(2). ▌

推论 2.5.11　(1)(燕鹏飞, 林寿[1999b]) 空间 X 是度量空间的紧覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数的 cfp 网的 k 空间.

(2)(林寿[1996b]) 空间 X 是度量空间的紧覆盖，序列覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的序列空间.

证明. 由定理 2.5.10, 引理 1.4.3 和引理 1.4.2 可得到(1). 由引理 2.1.6 和引理 2.1.4, 具有点可数cs网的序列空间的每一紧子集是可度量的，所以由推论2.5.9, 引理1.4.3和引理1.4.2 可得到(2). ∎

从例 2.5.2 知，具有点可数cs*网的序列空间严格地弱于具有点可数cfp网的k空间．于是，具有点可数的 cfp 网的 k 空间就是度量空间的紧覆盖的商 s 映象的实质的内在特征，而类"具有点可数 cs 网的序列空间"是含有度量空间的紧覆盖的商 s 映象的较好的空间类.

问题 2.5.12 (1) 具有紧可数 cs*网的序列空间是否具有点可数的 cfp 网?

(2) 是否存在具有点可数 cs*网的正则空间 X 使得 X 不具有点可数的 cfp 网?

本章主要介绍点可数覆盖与度量空间 s 映象之间的关系，最重要的技巧是利用 Ponomarev 系. 现将点可数覆盖与序列覆盖 s 映射的一些主要关系总结如下.

定理 2.5.13 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数网, (f, M, X, $\mathcal{P}$)为 Ponomarev 系，则 f 是 s 映射.

(1) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网，则 f 是伪序列覆盖映射和序列商映射(引理 1.3.8).

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs 网，则 f 是序列覆盖映射(定理 2.4.3).

(3) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 sn 网，则 f 是 1 序列覆盖映射(定理 2.4.6).

(4) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 so 网，则 f 是 2 序列覆盖映射(定理 2.4.9).

(5) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cfp 网，则 f 是紧覆盖映射(引理 2.5.7). ∎

3.3　点正则覆盖

由定理 2.4.6, 定理 2.4.11, 定理 3.1.7 和定理 3.2.8 可见, sn 网是描述度量空间的 1 序列覆盖映象的恰当的集族性质, 它的优点在于利用我们熟知的收敛序列和网来刻画空间的拓扑与处理集族问题. 一些与弱基相关的问题可转化为与 sn 网相关的问题来讨论并且降低空间对弱第一可数性的要求, 如 Hoshina[1970]关于具有点可数弱基的空间的映射刻画问题就是在首先获得了具有点可数sn网空间的映射刻画的情况下得到解决的(定理 2.4.6). 同时, 它也启发林寿[1996c]提出 1 序列覆盖映射的概念. 另一方面, 一些关于基或弱基的结果可以利用 sn 网给出更丰富的信息, 相关的结果可见葛英[2000]; 李进金[2000a]; 李克典[1998]; 林寿[1996c, 1997a]; 林寿, 燕鹏飞[2001a, 2001b]. 先引入几个概念.

定义 3.3.1(Alexandroff[1960])　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的点正则覆盖, 若 $x\in U\in\tau$, 则$\{P\in(\mathcal{P})_x : P\not\subset U\}$是有限的.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的一致覆盖, 若 $x\in X$, 如果 $\mathcal{P}'$ 是$(\mathcal{P})_x$ 的可数无限子集, 则 $\mathcal{P}'$ 是 x 在 X 中的网.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的正则覆盖, 若 $x\in U\in\tau$, 则存在 x 在 X 中的开邻域 V 使得$\{P\in(\mathcal{P})_V : P\not\subset U\}$是有限的.

显然, 空间 X 的正则覆盖是点正则覆盖, X 的点正则覆盖(一致覆盖)的子覆盖仍是 X 的点正则覆盖(一致覆盖).

从 §3.2 知点有限覆盖列的点星网刻画了度量空间的确定商紧映象. Arhangel'skii[1962]证明了具有一致基的空间等价于度量空间的开紧映象. Ikeda, 刘川和 Tanaka[2002]也证明了空间 X 是度量空间的序列覆盖的商紧映象当且仅当 X 具有点正则弱基. 这些结果不仅仅反映了点有限的点星网, 点正则覆盖, 一致覆盖与度量空间的紧映象之间的联系, 而且也从另一角度说明了点星网与点正则覆盖之间的必然联系, 激发了人们发现它们之间进一步关系的兴趣. 如 Ikeda, 刘川和 Tanaka[2002]提出了下述问题.

问题 3.3.2　(1) 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs 网的序列空间.

(2) 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs*网的序列空间.

本节的主要内容是利用 sn 网刻画度量空间的序列覆盖的紧映象和可分度量空间的紧覆盖的紧映象. 由此可获得问题 3.3.2(1)的肯定回答.

下面几个引理建立了点正则覆盖、一致覆盖、点星网之间的初步联系.

引理 3.3.3　对于空间 X 的覆盖 $\mathcal{P}$, 下述条件相互等价:

(1) $\mathcal{P}$ 是 X 的一致覆盖.

(2) 对于每一 $x\in X$, 若$<P_n>$是$(\mathcal{P})_x$ 的无限子集且 U 是 x 在 X 中的序列邻域, 那么存在 $m\in N$ 使得当 n>m 时有 $P_n \subset U$.

(3) $\mathcal{P}$ 是σ X 的点正则覆盖.

(4) $\mathcal{P}$ 是 X 的点正则覆盖.

证明. 只须证(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3), 而(3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(1)是显然的.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的一致覆盖, $x\in X$, $<P_n>$是$(\mathcal{P})_x$ 的无限子集, 并且 U 是 x 在 X 中的序列邻域. 若不存在 $m\in N$ 使得当 n>m 时有 $P_n \subset U$, 则存在$<P_n>$的无限子集$<P_{n_k}>$使得每一 $P_{n_k} \not\subset U$. 对于每一 $k\in N$, 取 $x_k \in P_{n_k} \setminus U$, 由于$<P_{n_k}>$的任何无限子集都是 x 在 X 中的网, 于是序列$\{x_k\}$收敛于 $x\in U$, 矛盾. 所以(1)$\Rightarrow$(2)成立. 设 $\mathcal{P}$满足(2), 并且 U 是 x 在σ X 中的开邻域, 那么 U 是 X 的序列开集, 于是$\{P\in(\mathcal{P})_x : P\not\subset U\}$是有限集, 从而 $\mathcal{P}$ 是σ X 的点正则覆盖. 因此(2)$\Rightarrow$(3)成立. █

引理 3.3.4 空间 X 的点有限加细的点星网的并是 X 的一致覆盖.

证明. 设$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的点有限加细的点星网, 让 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$. 对于每一 $x\in X$, 若$<P_m>$是$(\mathcal{P})_x$ 的无限子集, 则对于 $k\in N$, 存在 $P_{m_k}\in\mathcal{P}_{n_k}$ 使得 $m_k<m_{k+1}$且 $n_k<n_{k+1}$. 那么$<P_{m_k}>$是 x 在 X 中的网, 从而$<P_m>$是 x 在 X 中的网, 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的一致覆盖. █

设$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的集族列, 若$\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs 网(或 sn 网, so 网, 弱基), 则称$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的 cs 网(或 sn 网, so 网, 弱基).

引理 3.3.5 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有点有限 cs 覆盖(sn 覆盖, so 覆盖, g 覆盖)的点星网.

(2) X 具有构成 cs 网(sn 网, so 网, 弱基)的点有限加细的点星网.

(3) X 具有点有限加细的 cs 覆盖(sn 覆盖, so 覆盖, g 覆盖)的点星网.

证明. 仅证 cs 覆盖的情形, 其余情形是类似的. 设$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的点有限 cs 覆盖的点星网. 对于每一 $n\in N$, 令$\mathcal{F}_n=\Lambda_{i\le n}\mathcal{P}_i$, 那么$\{\mathcal{F}_n\}$是 X 的点有限加细的 cs 覆盖的点星网, 因而(1)$\Rightarrow$(3)成立. 由于 cs 覆盖的点星网是 cs 网, 所以(3)$\Rightarrow$(2)成立. 设$\{\mathcal{P}_n\}$既是 X 的 cs 网又是 X 的点有限

加细的点星网. 对于每一 $m\in N$, 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 不妨设所有的 $x_n\neq x$. 记$\{P\in(\mathcal{P}_n)_x : n\le m\}\setminus\{\{x\}\}=\{P_j : j\le k\}$. 对于每一$j\le k$, 取$p_j\in P_j\setminus\{x\}$, 则存在$i\in N$和$P\in\mathcal{P}_i$使得$\{x_n\}$是终于 P 的且 $P\subset X\setminus\{p_j : j\le k\}$, 这时 i>m, 从而存在$Q\in\mathcal{P}_m$使得 $P\subset Q$, 于是$\{x_n\}$是终于 Q 的. 因此,$\mathcal{P}_m$是 X 的 cs 覆盖, 所以(2)$\Rightarrow$(1)成立. ▮

对于空间 X, 记 $S(X)=\{x\in X : \{x\}$是 X 的序列开集$\}$, $\mathcal{S}(X)=\{\{x\} : x\in S(X)\}$. 显然, {x}是 X 的序列开集当且仅当 X 中不存在非平凡的序列收敛于 x.

引理 3.3.6 空间 X 的点正则 cs*网是 X 的点可数加细的 cs*覆盖的点星网.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点正则 cs*网. 由引理 3.3.3, $\mathcal{S}(X)\subset\mathcal{P}$.

(6.1) $\mathcal{P}$是点可数的.

若存在 $x\in X$ 使得$(\mathcal{P})_x$是不可数的, 由于$\mathcal{P}$的点正则性知对于 $y\neq x$, $\{P\in(\mathcal{P})_x : y\in P\}$是有限集, 于是存在$(\mathcal{P})_x$的无限子集$\langle P_n\rangle$, $x_n\in P_n\setminus\{x\}$和 $k\in N$ 使得每一 x_n 恰属于$(\mathcal{P})_x$的 k 个元, 即 $ord(x_n, (\mathcal{P})_x)=k$. 由引理 3.3.3, 序列$\{x_n\}$收敛于 x. 再由 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网, 存在$(\mathcal{P})_x$的子集$\langle F_i\rangle$和$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$使得对于每一 $i\in N$ 有$\{x_{n_j} : j\ge i\}\subset F_i\subset X\setminus\{x_{n_j} : j<i\}$, 那么$ord(x_{n_i}, (\mathcal{P})_x)\ge i$, 矛盾, 因而$\mathcal{P}$是点可数的.

置$\mathcal{P}^m=\{H\in\mathcal{P}$: 若 $H\subset P\in\mathcal{P}$, 则 $P=H\}$. $\mathcal{P}'=(\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}^m)\cup\mathcal{S}(X)$.

(6.2) 对于每一 $P\in\mathcal{P}$, 存在 $H\in\mathcal{P}^m$ 使得 $P\subset H$.

若不然, 则存在$\mathcal{P}$的无限子集$\langle P_n\rangle$使得$P\subset P_n\subset P_{n+1}$且$P_n\neq P_{n+1}$, 于是存在$x\neq y$使得$\{x, y\}\subset P_n$, 这与$\mathcal{P}$的点正则性相矛盾.

(6.3) $\mathcal{P}'$是 X 的点正则 cs*网.

设$x\in U\in\tau$且 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x, 不妨设$x\notin S(X)$, 由于$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网, 存在$\mathcal{P}$中互不相同的元C_1, C_2和 C 使得$x\in C= C_1\cap C_2\subset C_1\cup C_2\subset U$且 C 含有序列$\{x_n\}$的子序列, 于是 $C\in\mathcal{P}'$, 所以$\mathcal{P}'$是 X 的 cs*网, 从而它是 X 的点正则 cs*网.

令$\mathcal{P}_1=\mathcal{P}^m$, $\mathcal{P}_{n+1}=[(\mathcal{P}\setminus\bigcup_{i\le n}\mathcal{P}_i)\cup\mathcal{S}(X)]^m$, $n\in N$.

(6.4) $\mathcal{P}$是 X 的点可数加细的 cs*覆盖的点星网.

由(6.1)和(6.2)，$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的点可数加细的 cs*覆盖，并且 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$. 对于每一 $x\in X$，及 $P_n\in(\mathcal{P}_n)_x$，若 $x\in S(X)$，则存在 $m\in N$ 使得 $P_m=\{x\}$，于是$<P_n>$是 x 在 X 中的网；若 $x\notin S(X)$，则$<P_n>$的各项是两两互不相同的，由引理 3.3.3 知$<P_n>$是 x 在 X 中的网. 因此，$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的点星网. █

引理 3.3.7 序列扇 S_ω 不具有一致 cs*网.

证明. 记序列扇 S_ω 为 $\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\in N}T_n)$，其中每一 T_n 作为序列收敛于 x_0. 若 $\mathcal{P}$ 是 S_ω 的 cs*网，对于每一 $n\in N$，存在 $x_n\in T_n\setminus\{x_0\}$和 $P_n\in\mathcal{P}$ 使得 $\{x_0, x_n\}\subset P_n\subset S_\omega\setminus\{x_i: i<n\}$，于是$<P_n>$的各项是两两互不相同的且 $x_0\in P_n\not\subset X\setminus<x_i>$. 然而$<x_i>$是 X 的闭子集，所以 $\mathcal{P}$ 不是 S_ω 的一致覆盖. 故 S_ω 不具有一致 cs*网. █

本节的第一个主要结果是

定理 3.3.8(林寿，燕鹏飞[2001b]) 对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的紧映象.

(3) X 具有点正则 cs 网.

(4) X 具有点正则 sn 网.

(5) X 具有一致 cs 网.

(6) X 具有一致 sn 网.

(7) X 具有点有限 cs 覆盖的点星网.

(8) X 具有点有限 sn 覆盖的点星网.

证明. 由定理 3.2.8，引理 3.3.4，引理 3.3.5 和引理 3.3.3 知 (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(7)$\Leftrightarrow$(8)$\Rightarrow$(6)$\Leftrightarrow$(4)$\Rightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(5)，所以只须证(3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(8).

(3)$\Rightarrow$(4). 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点正则 cs 网. 由引理 3.3.3 和引理 3.3.6 知 $\mathcal{S}(X)\subset\mathcal{P}$ 且 $\mathcal{P}$ 是点可数的. 设 σX 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in U\in\tau(\sigma X)$，不妨设所有的 $x_n\neq x$，由于 $\mathcal{P}$ 的点可数性，$\{P\in(\mathcal{P})_x: \{x_n\}$是终于 P 的$\}$是可数无限集，记它为$<F_n>$，由引理 3.3.3 知存在 $n\in N$ 使得 $F_n\subset U$，故 $\mathcal{P}$ 是 σX 的 cs 网. 由引理 3.3.7，σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω. 再由推论 2.1.12，存

在$\mathcal{P}$的有限交的某子族$\mathcal{P}'$是 X 的 sn 网，从而$\mathcal{P}'$是 X 的点正则 sn 网.

(4)$\Rightarrow$(8). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点正则 sn 网. 由引理 3.3.6, $\mathcal{P}$是点可数的. 称$\mathcal{P}$具有性质(F)，若对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $\{H\in\mathcal{P}: P\subset H\}$是有限集.

(8.1) $\mathcal{P}$有性质(F).

若不然，存在$\mathcal{P}\setminus\{P\}$的无限子集$\langle P_n\rangle$使得每一$P\subset P_n$. 取 $x\in P$ 使得 P 是 x 的序列邻域，让 $x_n\in P_n\setminus P$, 由引理 3.3.3，序列$\{x_n\}$收敛于 x，矛盾.

置$\mathcal{P}^m=\{H\in\mathcal{P}$: 若 $H\subset P\in\mathcal{P}$，则 $P=H\}$, $\mathcal{P}'=(\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}^m)\cup\mathcal{S}(X)$.

(8.2) $\mathcal{P}^m$是 X 的点有限覆盖.

对于 $P\in\mathcal{P}$，由性质(F)，存在 $H\in\mathcal{P}^m$ 使得 $P\subset H$，从而 $\mathcal{P}^m$ 是 X 的覆盖. 对于 $x\in X$，如果$(\mathcal{P}^m)_x$是无限集，记它为$\langle H_n\rangle$. 由于$\mathcal{P}$是 X 的 sn 网，存在 x 在 X 中的序列邻域 $P\in\mathcal{P}$. 不妨设 $P\subset H_1$，于是对于每一 $n\in N$，存在 $x_n\in H_{n+1}\setminus H_1$，那么序列$\{x_n\}$收敛于 x 且$\langle x_n\rangle\cap P=\varnothing$，矛盾. 从而$(\mathcal{P}^m)_x$是有限集，故$\mathcal{P}^m$是 X 的点有限覆盖.

(8.3) $\mathcal{P}'$是 X 的点正则 sn 网.

设 $x\in U\in\tau$，不妨设 $x\notin S(X)$，由引理 3.3.3，存在 x 在 X 中的序列邻域 V，$W\in\mathcal{P}$ 和 $y\in V\setminus\{x\}$使得 $W\subset V\setminus\{y\}\subset V\subset U$，于是 $W\in\mathcal{P}'$，所以$\mathcal{P}'$是 X 的 sn 网，从而它是 X 的点正则 sn 网.

令 $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}^m$, $\mathcal{P}_{n+1}=[(\mathcal{P}\setminus\bigcup_{i\le n}\mathcal{P}_i)\cup\mathcal{S}(X)]^m$, $n\in N$.

(8.4) X 具有点有限 sn 覆盖的点星网.

由(8.1)，(8.2)和引理 3.3.6 的(6.4)知，$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$ 且$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的点有限加细的点星网. 由引理 3.3.5, X 具有点有限 sn 覆盖的点星网. ▊

由定理 3.3.8，推论 3.2.9 和引理 1.4.6，我们得到下述度量空间的序列覆盖的商紧映象的特征.

推论 3.3.9 对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的紧覆盖, 1 序列覆盖的商紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的商紧映象.

(3) X 具有点正则弱基.

(4) X 具有一致弱基.

(5) X 具有点有限 g 覆盖的点星网.

(6) X 是具有点正则 cs 网的序列空间. █

若将定理 3.3.8 证明中的"序列邻域"换为"序列开集", 应用类似的方法可获得度量空间的 2 序列覆盖的紧映象的特征.

定理 3.3.10(林寿, 燕鹏飞[2001b]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 2 序列覆盖的紧映象.

(2) X 具有点正则 so 网.

(3) X 具有一致 so 网.

(4) X 具有点有限 so 覆盖的点星网. █

由定理 2.4.5, 我们可获得如下具有一致基空间的经典的映射定理.

推论 3.3.11(Arhangel'skii[1962]) 空间 X 是度量空间的开紧映象当且仅当 X 具有一致基. █

下面讨论具有点正则 cs*网空间的部分结果. 由定理 3.2.2, 引理 3.3.4 和引理 3.3.3 知, 度量空间的子序列覆盖紧映象具有点正则 cs*网. 我们先继续§3.1, 讨论度量空间的 s, π 映象的相关结果.

定理 3.3.12 空间 X 是度量空间的伪序列覆盖(序列商, 子序列覆盖)的 s, π 映象当且仅当 X 具有点可数 cs*覆盖的点星网.

证明. 让 f:M$\rightarrow$X 是子序列覆盖的 s, π 映射, 其中(M, d)是度量空间. 对于每一 i$\in$N, 设 $\mathcal{B}_i$ 是{B(z, 1/i) : z$\in$M}的局部有限开加细, 让 $\mathcal{P}_i$=f($\mathcal{B}_i$). 由定理 3.1.6 所证, {$\mathcal{P}_i$}是 X 的点可数 cs*覆盖的点星网.

反之, 设{$\mathcal{P}_i$}是空间 X 的点可数 cs*覆盖的点星网. 对于每一 i$\in$N, 记 $\mathcal{P}_i$={P_α : $\alpha\in\Lambda_i$}. 让(f, M, X, $\mathcal{P}_i$)为 Ponomarev 系, 由引理 3.1.5 和定理 3.1.6, f:M$\rightarrow$X 是序列商的 π 映射. 对于每一 x$\in$X, 由引理 3.1.5 关于紧映射的论证知 $f^{-1}(x)=\prod_{i\in N}\{\alpha\in\Lambda_i : x\in P_\alpha\}$, 于是 f 是 s 映射. 往证 f 是伪序列覆盖映射.

对于每一 x$\in$X 及 X 中收敛于 x 的序列{x_n}, 记 K=[x_n]. 对于每一 i$\in$N, 由于 $\mathcal{P}_i$ 是 X 的点可数的 cs*覆盖, 由引理 1.3.7 中(7.1)的证明, 存在$(\mathcal{P}_i)_x$ 的有限子集 $\mathcal{F}_i$ 使得{x_n}是终于$\cup\mathcal{F}_i$的. 选取 $\mathcal{P}_i$ 的有限子集 $\mathcal{G}_i$ 使得 K$\setminus\cup\mathcal{F}_i\subset\cup\mathcal{G}_i$. 令 $\mathcal{P}_i$'=$\mathcal{F}_i\cup\mathcal{G}_i$, 则存在 Λ_i 的有限子集 Γ_i 使得 $\mathcal{P}_i$'={P_α : $\alpha\in\Gamma_i$}. 对于每一 $\alpha\in\Gamma_i$, 取

$$\mathrm{K}_{\alpha}=\begin{cases}\mathrm{K}\cap\mathrm{P}_{\alpha}, & \mathrm{x}\in\mathrm{P}_{\alpha}\\ (\mathrm{K}\setminus\cup\mathrm{F}_{\mathrm{i}})\cap\mathrm{P}_{\alpha}, & \mathrm{x}\notin\mathrm{P}_{\alpha}\end{cases}.$$

则$\{K_{\alpha}:\alpha\in\Lambda_i\}$是由 K 的紧子集组成的有限覆盖，于是 $\mathcal{P}_i$’是 K 的 cfp 覆盖．置 $L=\{(\alpha_i)\in\Pi_{i\in N}\Gamma_i:\bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}\neq\varnothing\}$．由定理 3.2.2 所证, L 是 M 的紧子集且 f(L)=K．故 f 是伪序列覆盖映射．█

由引理 3.3.6, 引理 1.4.2, 推论 3.1.10 和推论 2.1.7, 我们有

推论 3.3.13(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 设空间 X 具有点正则 cs*网，则

(1) X 是度量空间的伪序列覆盖的 s, π 映象.

(2) 若 X 是序列空间, 则 X 是度量空间的商, s, π 映象.

(3) 若 X 是 Fréchet 空间, 则 X 是具有点可数基的可展空间.

证明. 只须证明(3)成立, 而这又只须证明具有点可数基的半度量空间是可展空间.

设 $\mathcal{U}$ 是半度量空间(X, d)的点可数基．将 X 的点良序化，以≤表示其良序．对于每一 $n\in N$, $x\in X$，置

$(\mathcal{U})_x=\{U_n(x):n\in N\}$, $V_n(x)=\mathrm{int}B(x,1/n)$,

$h(n,x)=U_n(x)\cap V_n(x)$, $p(n,x)=\min\{y\in X:x\in h(n,y)\}$,

$g(n,x)=V_n(x)\cap(\cap\{h(i,p(i,x)):i\le n\})\cap(\cap\{U_j(p(i,x)):j\le n, i\le n, x\in U_j(p(i,x))\})$,

$\mathcal{G}_n=\{g(n,x):x\in X\}$.

则$\{\mathcal{G}_n\}$是 X 的展开, 所以 X 是可展空间. █

类似定理 3.1.7 和定理 3.1.6 的证明, 我们有

推论 3.3.14 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的 s, π 映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的 s, π 映象.

(3) X 具有点可数 cs 覆盖的点星网.

(4) X 具有点可数 sn 覆盖的点星网. █

推论 3.3.15 空间 X 是度量空间的 2 序列覆盖的 s, π 映象当且仅当 X 具有点可数 so 覆盖的点星网. █

引理 3.3.16 Arens 空间 S_2 不具有正则 cs*网.

证明. 记 Arens 空间 $S_2=\{x_0\}\cup\{x_{nm}: n\in N, m\in\omega\}$, 其中序列$\{x_{n0}\}$收敛于$x_0$, 并且对于每一 $n\in N$, 序列$\{x_{nm}\}_m$收敛于x_{n0}. 设$\mathcal{P}$是 S_2 的 cs*网. 由于对于每一 $n\in N$, $\{x_{nm}: m\in\omega\}$是 S_2 的开子集, 于是存在$P_n\in\mathcal{P}$和$m_n\in N$使得$\{x_{n0}, x_{nm_n}\}\subset P_n$且这些$P_n$是两两互不相同的. 令 $U=S_2\setminus\{x_{nm_n}: n\in N\}$, 那么 U 是 x_0的开邻域. 对于x_0在 S_2 中的任一开邻域 V, 存在 $k\in N$ 使得当 $n>k$ 时有$x_{n0}\in V$, 于是$P_n\cap V\neq\varnothing$且$P_n\not\subset U$. 所以$\mathcal{P}$不是 X 的正则覆盖, 故S_2不具有正则 cs*网. ▌

Sakai, Tamano 和 Yajima[1998]证明了具有正则 k 网的正则的 Fréchet 空间是可度量空间. 它的更一般形式是

定理 3.3.17 具有正则 k 网的正则的 k 空间是可度量空间.

证明. 设 X 是具有正则 k 网的正则的 k 空间. 由于 X 是正则空间, 设 X 具有正则的闭 k 网$\mathcal{P}$. 于是$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网. 由引理 3.3.6, 引理 3.3.16 和推论 2.1.11, X 是 Fréchet 空间. 再由推论 3.3.13, 我们只须证明 X 是集态正规空间. 对于 $x\in U\in\tau(X)$, 让 $G_1(x, U)=\mathrm{int}(\cup\{P\in\mathcal{P}: x\in P\subset U\})$, 则 $G_1(x, U)$是 x 在 X 中的开邻域. 事实上, 若 $x\notin G_1(x, U)$, 则存在 $U\setminus\cup\{P\in\mathcal{P}: x\in P\subset U\}$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x. 因为$\mathcal{P}$是 X 的 k 网, 存在$P_1\in\mathcal{P}$使得$x\in P_1\subset U$且$P_1$含有序列$\{x_n\}$的无限项, 这与序列$\{x_n\}$的选取相矛盾. 其次, 令 $\mathcal{P}'=(\mathcal{P})_{X\setminus U}$. 若 $z\in X\setminus\cup\mathcal{P}'$, 那么 $z\in U$, 于是存在 z 在 X 中的开邻域 V 使得 V 仅与$\mathcal{P}'$中的有限个元相交, 而$\mathcal{P}'$的元是 X 的闭子集, 从而存在 z 在 X 中的开邻域 W 使得 $W\cap(\cup\mathcal{P}')=\varnothing$, 因此$\cup\mathcal{P}'$是 X 的闭子集. 让 $G_2(x, U)=X\setminus\cup\{P\in\mathcal{P}': x\notin P\}$, 那么$G_2$也是x在X中的开邻域. 让$G(x, U)=G_1(x, U)\cap G_2(x, U)$. 则对应 $G: X\times\tau(X)\to\tau(X)$满足定义 1.2.9(4)的条件(4.1)和(4.2). 对于 X 中不同的点 x, y, 选取 $z\in G_1(x, X\setminus\{y\})$, 那么存在 $P_2\in\mathcal{P}$使得$\{x, z\}\subset P_2\subset X\setminus\{y\}$, 因此 $z\in P_2\subset X\setminus G_2(y, X\setminus\{x\})$, 从而 $G(x, X\setminus\{y\})\cap G(y, X\setminus\{x\})=\varnothing$, 所以 G 还满足定义 1.2.9(4)的条件(4.3). 故 X 是单调正规空间, 于是 X 是集态正规空间, 所以 X 是可度量空间. ▌

例 3.3.18 (1) 局部紧度量空间的紧覆盖, 商紧映象$\not\Rightarrow$度量空间的序列覆盖π映象, 度量空间的序列覆盖 s 映象.

如例 1.5.6 中的空间 X. X 是局部紧度量空间的紧覆盖的商有限到一映象. 由于 X 含有例 3.1.13(2)中的非 Cauchy 空间作为闭子空间, 所以 X 不是 Cauchy 空间. 由推论 3.1.11, X 不是度量空间的序列覆盖π映象. 由于 X 不具有点可数 cs 网, 所以 X 不是度量空间的序列覆盖 s 映象.

(2) 具有正则 cs 网的正则的 k 空间$\not\Rightarrow$序列空间; 如极大紧化βN. █

问题 3.3.19(Tanaka, 周浩旋[1985/86])　(局部紧)度量空间的商紧映象是否具有点 G_δ 性质?

问题 3.3.20　(1) 度量空间的伪序列覆盖的 s, π映象是否具有点正则 cs*网?

(2) 具有点正则 cs*网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖紧映象?

3.4　序列覆盖映射与 1 序列覆盖映射

从定理 3.1.7, 定理 3.2.8, 定理 3.3.8 和推论 3.3.14 可见 1 序列覆盖映射的独特性质及它与序列覆盖映射的联系. 本节继续探讨 1 序列覆盖映射的性质. 主要内容由两部分组成, 一是讨论怎样的序列覆盖映射是 1 序列覆盖映射, 二是以几个例子说明几类序列覆盖映射之间的不蕴含关系.

本节的第一部分讨论怎样的序列覆盖映射是 1 序列覆盖映射. 这也涉及林寿, 燕鹏飞[2001a]提出的下述问题.

问题 3.4.1　具有可数 cs 网的 Fréchet 空间是否是可分度量空间的序列覆盖的闭映象?

特别地, 序列扇 S_ω 既是可分度量空间的序列覆盖映象, 又是可分度量空间的闭映象, 那么 S_ω 是否是可分度量空间的序列覆盖的闭映象? 定理 3.3.8 暗示我们可以从考虑度量空间的序列覆盖的紧映射是否是 1 序列覆盖映射入手.

定理 3.4.2(林寿, 燕鹏飞[2001a])　设 f:X$\rightarrow$Y 是序列覆盖的紧映射. 如果 X 是度量空间, 则 f 是 1 序列覆盖映射.

证明. 因为 X 是度量空间, 由定理 1.3.1, 存在 X 的局部有限的开覆盖列{$\mathcal{B}_n$}满足

(2.1) 每一$\mathcal{B}_{n+1}$星加细$\mathcal{B}_n$.

(2.2) {$\mathcal{B}_n$}是 X 的展开.

对于每一 n$\in$N, 置$\mathcal{P}_n$=f($\mathcal{B}_n$). 因为 f 是序列覆盖的紧映射, $\mathcal{P}_n$是 Y 的点有限 cs 覆盖. 由引理 3.2.1 的(2)$\Rightarrow$(1)知$\mathcal{P}_n$的某子集是 X 的 sn 覆盖. 于是

(2.3) 对于每一 $z\in Y$, 存在 $P_z\in\mathcal{P}_n$ 使得 P_z 是 z 在 Y 中的序列邻域.

对于每一 $y_0\in Y$, 置 $U_n=\{x\in X$: 对于每一 $B\in(\mathcal{B}_n)_x$, $f(B)$不是 y_0 在 Y 中的序列邻域$\}$. 则

(2.4) 如果 $x\in U_n$, 则$\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x\subset U_{n+1}$.

若不然, 存在点 $p\in\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x\setminus U_{n+1}$, 由 U_{n+1}的定义, 对于某一 $B\in(\mathcal{B}_{n+1})_p$, $f(B)$是 y_0在 Y 中的序列邻域. 取某一 $B_1\in(\mathcal{B}_{n+1})_x$, 则 $p\in B\cap B_1$, 于是由(2.1), 对于某一 $B_2\in\mathcal{B}_n$ 有 $B\cup B_1\subset B_2$, 因此 $B_2\in(\mathcal{B}_n)_x$ 且 $f(B_2)$是 y_0在 Y 中的序列邻域, 故 $x\notin U_n$, 矛盾.

(2.5) $f^{-1}(y_0)\not\subset\bigcup_{n\in N}U_n$.

若不然, $f^{-1}(y_0)\subset\bigcup_{n\in N}U_n$. 由(2.4), 对于每一 $n\in N$, $U_n\subset\cup\{\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x: x\in U_n\}\subset U_{n+1}$.

因为 $f^{-1}(y_0)$是 X 的紧子集且$\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x$是 X 的开子集, 存在 $m\in N$ 有 $f^{-1}(y_0)\subset U_m$. 由(2.3), 存在 $B\in\mathcal{B}_m$ 使得 $f(B)$是 y_0在 Y 中的序列邻域, 于是$\emptyset\neq f^{-1}(y_0)\cap B\subset X\setminus U_m$, 矛盾.

现在, 固定点 $x_0\in f^{-1}(y_0)\setminus\bigcup_{n\in N}U_n$, 那么

(2.6) 如果在 Y 中的序列$\{y_i\}$收敛于 y_0, 则存在 X 中收敛于 x_0的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_i)$.

对于每一 $n\in N$, 由于 $x_0\notin U_n$, 存在 $B_n\in(\mathcal{B}_n)_{x_0}$ 使得 $f(B_n)$是 y_0在 Y 中的序列邻域, 于是 $\langle st(x_0, \mathcal{B}_n)\rangle$是 x_0在 X 中递减的局部基, 且每一 $f(st(x_0, \mathcal{B}_n))$是 y_0在 Y 中的序列邻域, 由引理 2.4.5, 存在 X 中收敛于 x_0的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_i)$.

总之, f 是 1 序列覆盖映射. ▮

问题 3.4.3 度量空间上的序列覆盖的 π 映射是否是 1 序列覆盖映射?

下面讨论序列覆盖闭映射的情形. 对于问题 3.4.1 的探讨产生了度量空间的一个出乎意料的映射定理, 它也说明问题 3.4.1 的回答是否定的. 我们知道, 有不少的映射保持可度量性, 由定理 1.3.3 知, 完备映射或既开且闭的映射保持可度量性. §2.4 已部分说明了度量空间上的序列覆盖映射具有与开映射类似的一些良好性质. 下述定理再一次说明了序列覆盖映射与开映射的类似

性质.

定理 3.4.4(燕鹏飞，林寿，江守礼[2000]) 序列覆盖的闭映射保持可度量性.

证明. 设 X 是可度量空间，f:X$\to$Y 是序列覆盖的闭映射．由定理 1.3.3，为证明 Y 是可度量空间，只须证明 Y 是第一可数空间．由 X 的可度量性及定理 1.3.1，存在 X 的局部有限的开覆盖列{$\mathcal{B}_n$}满足

(4.1) 每一 $\mathcal{B}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{B}_n$.

(4.2) {$\mathcal{B}_n$}是 X 的展开.

对于每一$t_0 \in$Y，若 Y 中不存在非平凡的序列收敛于t_0，由 Y 的Fréchet空间性质及引理1.4.7，t_0是 Y 的孤立点，从而它是 Y 的第一可数点．现在设t_0是 Y 中的某一非平凡收敛序列的极限点，取定 Y 中由互不相同点组成的序列{t_n}收敛于t_0．对于每一 n$\in$N，置 $\mathcal{P}_n$ ={f(B) : B$\in\mathcal{B}_n$ 且{t_n}是终于 f(B)的}={$P_\alpha : \alpha \in \Gamma_n$}．由于 f 是闭映射且 $\mathcal{B}_n$ 在 X 中是局部有限的，所以 $\mathcal{P}_n$ 是 Y 的遗传闭包保持集族.

(4.3) $\mathcal{P}_n$ 是有限的.

若 $\mathcal{P}_n$ 是无限的，则存在{t_n}的子序列{t_{n_k}}和 $\mathcal{P}_n$ 的无限子族<P_k>使得每一 $t_{n_k} \in P_k$，由于<P_k>是遗传闭包保持的，所以<t_{n_k}>在 Y 中是离散的，这一矛盾说明 $\mathcal{P}_n$ 是有限的.

(4.4) 存在 B$\in\mathcal{B}_n$ 使得 f(B)是t_0在 Y 中的序列邻域且对于 f(B)中任一收敛于t_0的序列 K，存在 B 中的收敛序列 L 有 f(L)=K.

对于每一$\alpha \in \Gamma_n$，P_α 或者不是t_0的序列邻域，或者是t_0的序列邻域．若(4.4)不成立，则存在 Y 中的收敛于t_0的序列 K_α 使得或者($K_\alpha \setminus \{t_0\}) \cap P_\alpha = \varnothing$，或者 $K_\alpha \subset P_\alpha$ 且对于 $\mathcal{B}_n$ 中任一使得 f(B)=P_α 的元 B，B 中不存在收敛序列 L_α 满足 f(L_α)=K_α．令 K_n=($\bigcup_{\alpha\in\Gamma_n} K_\alpha$)$\cup$<$t_n$>．由$\Gamma_n$的有限性知 K_n 是 Y 中收敛于t_0的序列．因为 f 是序列覆盖映射，存在 X 中的收敛序列 L_n 使得 f(L_n)=K_n，从而存在 B$\in\mathcal{B}_n$ 使得 L_n 是终于 B 的，于是有$\alpha \in \Gamma_n$ 使得 f(B)=P_α，这时($K_\alpha \setminus \{t_0\}) \cap P_\alpha \neq \varnothing$且存在 B 中的收敛序列 L 有 f(L)=$K_\alpha$，这一矛盾说明(4.4)成立.

设<f(B_k)>是(4.4)所获得的t_0的序列邻域族，因为Y是Fréchet空间，由引理1.4.7，每一f(B_k)是t_0在Y中的邻域，而且

(4.5) <f(B_k)>是t_0在Y中的邻域基.

因为序列{t_n}是终于每一 f(B_k)的，由(4.4)，存在序列{t_n}的子序列{t_{n_k}}使得每一$B_k \cap f^{-1}(t_{n_k}) \neq \varnothing$，取$a_k \in B_k \cap f^{-1}(t_{n_k})$，则由于f是闭映射知序列{$a_k$}在X中有聚点，于是它存在收敛于X中某点$a$的子序列{$a_{k_i}$}，这时$a \in f^{-1}(t_0)$. 设V是$t_0$在Y中的邻域，则$f^{-1}(V)$是$a$在X中的邻域，由(4.2)，存在自然数 m 使得 $st(a, \mathcal{B}_m) \subset f^{-1}(V)$. 因为序列{$a_{k_i}$}收敛于$a$，存在自然数 i>m 和 $B_1 \in \mathcal{B}_{m+1}$使得$a_{k_i} \in st(a, \mathcal{B}_{m+1})$且$B_{k_i} \subset B_1$. 设$a_{k_i} \in B_2 \in (\mathcal{B}_{m+1})_a$，由(4.1)，$B_1 \cup B_2 \subset st(a, \mathcal{B}_m)$，这说明$B_{k_i} \subset f^{-1}(V)$，因此 f($B_{k_i}$) ⊂ V，故(4.5)成立.

由此可见，Y在t_0是第一可数的. 因此Y是第一可数空间，故Y是可度量空间. ∎

S_ω是具有可数cs网的不可度量的Fréchet空间，所以S_ω不是度量空间的序列覆盖的闭映象. 因此，问题3.4.1的回答是否定的.

问题 3.4.5 序列覆盖的闭映射是否保持 g 可度量空间?

定理 3.4.6(燕鹏飞，林寿，江守礼[2000]) 设f:X→Y是序列覆盖的闭映射，如果X是可度量空间，则f是1序列覆盖映射.

证明. 对于任一$t_0 \in Y$，不妨设t_0是Y中的某一非平凡收敛序列的极限点，取定Y中由互不相同点组成的序列{t_n}收敛于t_0. 因为X是可度量空间，由定理1.3.1，存在X的局部有限的开覆盖列{$\mathcal{B}_n$}满足

(6.1) 每一$\mathcal{B}_{n+1}$星加细$\mathcal{B}_n$.

(6.2) {$\mathcal{B}_n$}是X的展开.

对于每一 n∈N，置$\mathcal{P}_n = f(\mathcal{B}_n)$. 如定理3.4.4的(4.4)知

(6.3) 存在$B \in \mathcal{B}_n$使得f(B)是t_0在Y中的序列邻域且对于f(B)中任一收敛于t_0的序列K，存在B中的收敛序列L有 f(L)=K.

置 $U_n=\{p\in X$: 对于每一 $B\in(\mathscr{B}_n)_p$, $f(B)$不是 t_0在 Y 中的序列邻域$\}$. 由定理 3.4.2 的(2.4)的证明有

(6.4) 如果 $x\in U_n$, 则$\cap(\mathscr{B}_{n+1})_x\subset U_{n+1}$.

于是

(6.5) $\partial f^{-1}(t_0)\not\subset\bigcup_{n\in N}U_n$.

否则, $\partial f^{-1}(t_0)\subset\bigcup_{n\in N}U_n$. 由(6.4), 对于每一 $n\in N$, $U_n\subset\cup\{\cap(\mathscr{B}_{n+1})_x:x\in U_n\}\subset U_{n+1}$. 由定理 3.4.4 和定理 1.3.3, $\partial f^{-1}(t_0)$是 X 的紧子集, 而$\cap(\mathscr{B}_{n+1})_x$是 X 的开子集, 所以对于某一 $m\in N$ 有$\partial f^{-1}(t_0)\subset U_m$. 由(6.3), 存在 $B\in\mathscr{B}_m$ 使得 $f(B)$是 t_0在 Y 中的序列邻域且存在 $k\in N$ 和 B 中的收敛序列 L 有 $f(L)=\{t_n:n\geq k\}$. 设 L 在 X 中收敛于 l, 则 $l\in\partial f^{-1}(t_0)\cap B\subset X\setminus U_m$, 矛盾.

现在, 固定点 $x_0\in\partial f^{-1}(t_0)\setminus\bigcup_{n\in N}U_n$. 由定理 3.4.2 的(2.6)的证明有

(6.6) 如果在 Y 中序列$\{y_i\}$收敛于 t_0, 那么存在 X 中收敛于 x_0的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_i)$.

这表明, f 是 1 序列覆盖映射. ∎

由定理 2.4.15, 定理 3.4.6 中的 1 序列覆盖映射是几乎开映射.

几类序列覆盖映射及相关的与商映射、开映射等之间的关系, 尤其是度量空间上几类序列覆盖映射之间的关系, 已在前几章的不少定理中大量反映. 本节的最后举几个与这些结果相关的涉及序列覆盖映射的例子说明一些不蕴含关系.

例 3.4.7 (1) 紧度量空间的完备映射未必是序列覆盖映射.

设 $X=(\{0\}\cup\{1/2n:n\in N\})\oplus(\{0\}\cup\{1/2n-1:n\in N\})$, $Y=S_1$. X, Y 都赋予实数的子空间拓扑, 则 X 和 Y 都是紧度量空间. 让 $f:X\to Y$ 是显然映射, 则 f 是完备映射, 但 f 不是序列覆盖映射.

(2) 完备映射未必是序列商映射.

设 X 是极大紧化βN, $Y=S_1$. 定义 $f:X\to Y$ 使得 $f(\beta N\setminus N)=\{0\}$且 $f(n)=1/n$, 那么 f 是完备映射, 但 f 不是序列商映射.

(3) 可分度量空间到紧度量空间上的伪序列覆盖的商紧映射未必是紧覆盖映射.

我们介绍 Michael[1979]构造的例子. 对于每一 $x\in I$, 取定 O_x 是$\{x\}\times I$ 中长度为 1/4 的开区间. 令 $X=\{(x, y)\in I\times I : (x, y)\notin O_x\}$, Y=I, 则 X 是可分度量空间, Y 是紧度量空间. 定义 $f:X\to Y$ 是从 X 的点到它的第一个坐标的投影映射, 那么 f 是伪序列覆盖的商紧映射, 但 f 不是紧覆盖映射.

(4) 紧度量空间的序列覆盖闭映射未必是开映射.

设 $X=S_1\oplus(\{0\}\cup\{1/2n : n\in N\})$, $Y=S_1$. X, Y 都赋予实数的子空间拓扑, 则 X 和 Y 都是紧度量空间. 让 $f:X\to Y$ 是显然映射, 则 f 是序列覆盖的闭映射, 但 f 不是开映射.

(5) 度量空间的 2 序列覆盖映射未必是紧覆盖映射或商映射.

设 Y 是极大紧化 βN, 空间 X 是集合 βN 赋予离散拓扑, 则 X 是度量空间. 让 $f:X\to Y$ 是恒等映射, 则 f 是 2 序列覆盖映射, 但 f 既不是紧覆盖映射又不是商映射.

(6) 度量空间的 1 序列覆盖的商紧映象未必是度量空间的 2 序列覆盖映象或度量空间的伪开映象.

设 X 是例 1.5.1 中的 Arens 空间 S_2, 则 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商紧映象. 由于 X 既不是 sof 可数空间又不是 Fréchet 空间, 从定理 2.4.11, 引理 1.4.3 知 X 既不是度量空间的 2 序列覆盖映象又不是度量空间的伪开映象.

(7) 度量空间的序列覆盖的伪开 s 映象未必是度量空间的 1 序列覆盖映象.

设 X 是例 1.5.2 中的序列扇 S_ω. 由于 X 是具有可数 cs 网的 Fréchet 空间, 从推论 2.4.4 和引理 1.4.2 知 X 是度量空间的序列覆盖的伪开 s 映象. 由于 X 不是 snf 可数空间, 从定理 2.4.11 知 X 不是度量空间的 1 序列覆盖映象.

(8) 可分度量空间的紧覆盖的商紧映象未必是度量空间的序列覆盖的紧映象

设 X 是例 3.1.13(2)所构造的具有可数弱基的正则的非 Cauchy 空间. 由推论 3.2.6 知 X 是可分度量空间的紧覆盖的商紧映象. 由于 X 不是 Cauchy 空间, 从推论 3.1.11 知 X 不是度量空间的序列覆盖的紧映象.

(9) 开映射未必是子序列覆盖映射.

设 $X=\{0\}\cup N^2$. 对于每一 n, $i\in N$, 令 $V(n, i)=\{(n, k)\in N^2 : k\ge i\}$. 集合 X 赋予如下拓扑:

N^2 中的点是 X 的孤立点, 点 0 的邻域基中的元形如$\{0\}\cup(\bigcup_{n\geq m}V(n, i_n))$, 其中 m, $i_n\in N$. 让 $Y=S_1$. 定义 $f:X\to Y$ 使得 f(0)=0 且 f((n, i))=1/n, 则 f 是开映射, 但 f 不是子序列覆盖映射.

(10) 度量空间上的紧覆盖映射未必是商映射.

如例 1.5.7, 设 $Y=N\cup\{p\}$是 Michael 空间, 则 Y 的所有紧子集是有限集且 Y 不是 k 空间. 让 $X=\oplus\{Z：Z$ 是 Y 的非空紧子集$\}$, 则 X 是度量空间. 定义 $f:X\to Y$ 是显然映射, 则 f 是紧覆盖映射, 但 f 不是商映射.

(11) 度量空间的序列商的伪开映射未必是伪序列覆盖映射.

如例 1.5.3 的 Gillman-Jerison 空间 $Z=\psi(N)$. 定义 $g:Z\to S_1$ 使得 $g(\psi(N)\setminus N)=\{0\}$且 g(n)=1/n. 由于在$\psi(N)$中 N 的任一无限子集有聚点在$\psi(N)\setminus N$中, 所以 g 是序列商映射, 但是 g 不是紧覆盖映射. 又由于 Z 是第一可数空间, 从定理 2.4.11 知存在度量空间 X 和 2 序列覆盖映射 $h:X\to Z$. 于是复合映射 $f=g\circ h:X\to S_1$是序列商映射. 因为 S_1是 Fréchet 空间, 由引理 1.4.2 知 f 是伪开映射. 但 f 不是伪序列覆盖映射, 否则存在 X 的紧子集 K 使得 $f(K)=S_1$, 即 $g(h(K))=S_1$, 于是 g 是紧覆盖映射, 矛盾. ▌

问题 3.4.8 设 X 是度量空间, $f:X\to Y$ 是序列商的紧映射, 那么 f 是否是伪序列覆盖映射?

第四章　关于遗传闭包保持覆盖

1924 年 Alexandroff 引进了局部有限集族的概念(Engelking[1977]). 仿紧性的定义及 Nagata-Smirnov 度量化定理的建立表明了局部有限集族是一般拓扑学中的重要概念. 1966 年 Lašnev[1966]引进了遗传闭包保持集族的概念. 1975 年 Burke, Engelking 和 Lutzer[1975]证明了具有σ遗传闭包保持基的正则空间等价于可度量空间(林寿[1995], 定理 2.5.17), 1985 年 Foged[1985]证明了度量空间的闭映象等价于具有σ遗传闭包保持闭 k 网的 Fréchet 空间(林寿[1995], 定理 2.5.7). 这两条定理开辟了遗传闭包保持覆盖的两个研究课题, 一是怎样的遗传闭包保持集族可转化为局部有限集族? 林寿[1995]列举了这方面的不少结果; 二是遗传闭包保持集族与闭映射的相互关系, 本章将介绍这方面的一些结果.

度量空间的闭映象称为 Lašnev 空间. Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]曾问: Lašnev 空间是否具有点可数 k 网? Foged 关于 Lašnev 空间的遗传闭包保持刻画肯定地回答了上述问题, 同时引导人们通过由遗传闭包保持覆盖所决定的空间建立度量空间的闭映象与点可数覆盖空间的联系. 本章围绕 Siwiec[1974]关于 g 可度量空间的覆盖性质问题(问题 4.1.1), Miwa(Tanaka, 周浩旋[1985/86])关于确定的 Lašnev 空间的特征问题(问题 4.3.1)等介绍广义度量空间的覆盖性质与确定的 Lašnev 空间的刻画.

4.1　k 网与覆盖性质

度量空间具有很好的覆盖性质和正规性质. 广义度量空间也有一些相应的覆盖性质与正规性, 如正则的σ空间是次仿紧空间. Siwiec[1974]提出下述问题.

问题 4.1.1　(1) g 可度量空间是正规空间吗?

(2) 可分的 g 可度量空间具有可数弱基吗?

(3) 正规的 g 可度量空间是仿紧空间吗?

Jakovlev[1976]肯定地回答了上述问题(2)和(3). Foged[1986]系统地研究了由 k 网确定的广义度量空间类的覆盖性质与正规性, 在更一般的$\aleph$空间类回答了上述问题, 如他证明了

(1.1) 存在非正规的 g 可度量空间.

(1.2) 在假设(MA+¬ CH)之下存在非单调正规的具有可数弱基的正则空间.

(1.3) 具有σ局部有限 k 网的正则的 k 空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

(1.4) 具有σ局部有限 k 网的正规的 k 空间是仿紧空间.

与上述(1.3)和(1.4)相应的结果在具有σ遗传闭包保持 k 网的空间上是否成立? 彭良雪[2000]和刘川[1995]分别获得了肯定的回答.

引理 4.1.2 在正则空间中遗传闭包保持集族的闭包仍是遗传闭包保持集族.

证明. 设$\mathcal{P}$是正则空间 X 的遗传闭包保持集族. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 若$\mathcal{P}$的闭包 cl($\mathcal{P}$)不是 X 的遗传闭包保持集族, 那么对于每一$\alpha\in\Lambda$, 存在$H_\alpha\subset cl(P_\alpha)$使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}cl(H_\alpha)$不是 X 的闭子集. 取$x\in cl(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha)\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda}cl(H_\alpha)$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 存在 X 的分别含有 x 和$cl(H_\alpha)$的互不相交的开子集$V_\alpha$和$U_\alpha$, 于是$H_\alpha\subset U_\alpha\cap cl(P_\alpha)\subset cl(U_\alpha\cap P_\alpha)$, 所以$x\in cl(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}cl(U_\alpha\cap P_\alpha))=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}cl(U_\alpha\cap P_\alpha)$, 从而有$\beta\in\Lambda$使得 $x\in cl(U_\beta\cap P_\beta)$, 因此$U_\beta\cap P_\beta\cap V_\beta\neq\varnothing$, 矛盾. 故$\mathcal{P}$的闭包仍是 X 的遗传闭包保持集族. ▌

引理 4.1.3 具有σ弱遗传闭包保持 k 网的空间具有σ紧有限 k 网.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的σ弱遗传闭包保持 k 网. 记$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$, 其中每一$\mathcal{P}_n$是 X 的弱遗传闭包保持集族且$\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对于每一 $n\in N$, 置$D_n=\{x\in X : (\mathcal{P}_n)_x$不是有限的$\}$, $\mathcal{F}_n=\{P\setminus D_n : P\in\mathcal{P}_n\}\cup\{\{x\}: x\in D_n\}$.

(3.1) $\mathcal{F}_n$是 X 的紧有限的子集族.

设 K 是 X 的任一非空紧子集. 首先, $K\cap D_n$是有限集. 否则, 存在 K 的无限子集$<x_i>$和$\mathcal{P}_n$的无限子集$<P_i>$使得每一$x_i\in P_i$, 从而$<x_i>$是 K 的闭离散子集, 矛盾. 若存在$\mathcal{P}_n$的无限子集$<F_i>$使得每一$(F_i\setminus D_n)\cap K\neq\varnothing$, 那么存在 K 的无限子集$<y_k>$和子集列$\{F_{i_k}\}$使得每一$y_k\in F_{i_k}$, 于是$<y_k>$是 K 的闭离散子集, 矛盾. 故$(\mathcal{F}_n)_K$是有限的.

(3.2) $\bigcup_{n\in N}\mathcal{F}_n$是 X 的 k 网.

对于每一$K\subset U$, 其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集, 存在 $n\in N$ 和$\mathcal{P}'\in\mathcal{P}_n^{<\omega}$使得$K\subset\cup\mathcal{P}'\subset U$. 令$\mathcal{F}=\{P\setminus D_n : P\in\mathcal{P}'\}\cup\{\{x\}: x\in K\cap D_n\}$. 那么$\mathcal{F}\in\mathcal{F}_n^{<\omega}$且$K\subset\cup\mathcal{F}\subset U$. 故$\bigcup_{n\in N}\mathcal{F}_n$是 X 的 k 网. ▌

定理 4.1.4(彭良雪[2000]) 具有σ遗传闭包保持 k 网的正则的 k 空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

证明. 设X是具有σ遗传闭包保持k网的正则的k空间. 为证明X是遗传亚Lindelöf空间, 只须证明X的任一开子空间是亚Lindelöf空间. 由于具有σ遗传闭包保持k网的正则的k空间性质是开遗传性质, 所以又只须证明X是亚Lindelöf空间. 由引理4.1.2, X具有σ遗传闭包保持的闭k网. 设$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$是X的k网, 其中每一$\mathcal{P}_n$是X的遗传闭包保持的闭集族且$\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$.

(4.1) X的每一离散的闭子集族有点可数的开扩张.

设$\mathcal{F}$是X的离散闭子集族. 记$\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, $\mathcal{P}(\varnothing)=\mathcal{F}$. 对于每一n∈N, $\alpha\in\Lambda$, 让

$P^*_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\alpha\neq\varnothing, P\cap F_\beta=\varnothing,\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$,

$P_\alpha(n)=P^*_\alpha(n)\setminus\cup\{P^*_\beta(n):\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$.

那么对于任一$\Lambda'\subset\Lambda$, $\bigcup_{\beta\in\Lambda'}P^*_\beta(n)$是X的闭子集. 令$\mathcal{P}(n)=\{P_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$. 对于N的有限序列$\delta$, 如果$\mathcal{P}(\delta)$已被定义. 设$\mathcal{P}(\delta)=\{P_\alpha(\delta):\ \alpha\in\Lambda\}$, 其中$P_\alpha(\delta)=P^*_\alpha(\delta)\setminus\cup\{P^*_\beta(\delta):\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$, 且对于任一$\Lambda'\subset\Lambda$, $\bigcup_{\gamma\in\Lambda'}P^*_\gamma(\delta)$是X的闭子集. 对于每一n∈N, 按下述方式构造$\mathcal{P}(\delta n)$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 让

$P^*_\alpha(\delta n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap P_\alpha(\delta)\neq\varnothing, P\cap P^*_\beta(\delta)=\varnothing,\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$,

$P_\alpha(\delta n)=P^*_\alpha(\delta n)\setminus\cup\{P^*_\beta(\delta n):\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$,

$\mathcal{P}(\delta n)=\{P_\alpha(\delta n):\ \alpha\in\Lambda\}$.

那么对于任一$\Lambda'\subset\Lambda$, $\bigcup_{\gamma\in\Lambda'}P^*_\gamma(\delta n)$是X的闭子集. 让$U_\alpha=\cup\{P_\alpha(\delta):\ \delta$是N的有限序列$\}$, $\mathcal{U}=\{U_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 我们将证明$\mathcal{U}$是$\mathcal{F}$的点可数的开扩张.

对于每一$x\in F_\alpha$, 存在x的开邻域V_x使得对于每一$\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}$有$V_x\cap F_\beta=\varnothing$, 那么存在n∈N和$P\in\mathcal{P}_n$使得$x\in P\subset V_x$, 于是$P\subset P^*_\alpha(n)$, 而$x\notin P^*_\beta(n)$, 所以$x\in P_\alpha(n)$, 故$F_\alpha\subset U_\alpha$.

由引理4.1.3和推论2.1.4, X是序列空间, 为证明U_α是X的开子集只须证明U_α在X中是序列开的. 设$x\in U_\alpha$且Z是X中收敛于x的序列, 则存在N的有限序列δ使得$x\in P_\alpha(\delta)$. 令$M=\cup\{P^*_\beta(\delta) :\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$, 则M是X的闭子集且$x\notin M$, 于是存在x的开邻域$G_x$使得$G_x\cap M=\varnothing$, 所以存在n∈N和$P_x\in\mathcal{P}_n$使得$x\in P_x\subset G_x$且$P_x$含有序列Z的无限项, 从而

$P_x \subset P^*_\alpha(\delta n)$. 对于每一$\beta \in \Lambda \setminus \{\alpha\}$，由于 $x \in P^*_\alpha(\delta)$，所以 $x \in X \setminus \cup \{P^*_\beta(\delta n) : \beta \in \Lambda \setminus \{\alpha\}\}$，于是 Z 的子序列是终于 $P_\alpha(\delta n)$的，从而 U_α 是 x 的序列邻域，故 U_α 是 X 的开子集.

若$\mathcal{U}$不是点可数的，则存在$x \in X$ 使得$|\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\}| > \omega$，于是存在 N 的一个有限序列$\delta$和$\Lambda$的不可数子集$\Lambda'$使得当$\alpha \in \Lambda'$时有 $x \in P_\alpha(\delta)$，这与$\{P_\alpha(\delta) : \alpha \in \Lambda\}$是两两互不相交的子集族相矛盾.

(4.2) X 是亚 Lindelöf 空间.

设 $\mathcal{W}$ 是空间 X 的开覆盖，由定理 1.3.5，X 是σ空间，于是 $\mathcal{W}$ 有加细$\bigcup_{i \in N} \mathcal{F}_i$，其中每一$\mathcal{F}_i = \{F_{i\alpha} : \alpha \in \Lambda_i\}$是 X 的离散的闭子集族. 对于每一 $i \in N$，由(4.1)，存在 X 的点可数的开子集族$\mathcal{U}_i = \{U_{i\alpha} : \alpha \in \Lambda_i\}$使得每一 $F_{i\alpha} \subset U_{i\alpha}$. 对于每一$i \in N$和$\alpha \in \Lambda_i$，选取$W_{i\alpha} \in \mathcal{W}$使得$F_{i\alpha} \subset W_{i\alpha}$，那么$\bigcup_{i \in N} \{W_{i\alpha} \cap U_{i\alpha} : \alpha \in \Lambda_i\}$是 $\mathcal{W}$ 的点可数的开加细，所以 X 是亚 Lindelöf 空间. ▮

若空间 X 的每一闭离散子空间至多是可数子集，则称 X 是$\aleph_1$紧空间. Lindelöf 空间和遗传可分空间都是$\aleph_1$紧空间.

推论 4.1.5 设 X 是具有σ遗传闭包保持 k 网的空间. 若 X 满足下述条件之一，则 X 具有可数 k 网.

(1) $\aleph_1$紧空间.

(2) 可分，正则的 k 空间.

证明. 由于可分的亚 Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间，由定理 4.1.4，只须证明具有σ遗传闭包保持 k 网的$\aleph_1$紧空间具有可数 k 网. 设$\mathcal{P} = \bigcup_{n \in N} \mathcal{P}_n$是空间 X 的 k 网，其中每一$\mathcal{P}_n$是 X 的遗传闭包保持的子集族且$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$. 对于每一$n \in N$，置$E_n = \{x \in X : |(\mathcal{P}_n)_x| > \omega\}$，则

(5.1) $\{P \setminus E_n : P \in \mathcal{P}_n\}$是可数的子集族.

若不然，则存在 $\mathcal{P}_n$ 的不可数子集$\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$和 X 的子集$\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$使得每一$x_\alpha \in P_\alpha \setminus E_n$. 由$\mathcal{P}_n$是遗传闭包保持的及 X 是$\aleph_1$紧空间知$\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$是可数集，于是不妨

设存在 $x\in X\setminus E_n$ 使得每一 $x_\alpha=x$，这与 E_n 的定义相矛盾.

(5.2) E_n 是 X 的可数的闭离散子空间.

对于每一 $Z\subset E_n$ 及 $|Z|\le\omega_1$，记 $Z=\{x_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 由 E_n 的定义及良序定理，应用超限归纳法，我们可选取 $\mathcal{P}_n$ 的由两两互不相同元组成的子集 $\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 使得每一 $x_\alpha\in P_\alpha$，于是 Z 是 X 的可数闭离散子空间，从而 E_n 是 X 的可数闭离散子空间.

对于每一 $n\in N$，让 $\mathcal{P}_n'=\{P\setminus E_n:P\in\mathcal{P}_n\}\cup\{\{x\}:x\in E_n\}$，则 $\mathcal{P}_n'$ 是可数的.

(5.3) $\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n'$ 是 X 的可数 k 网.

设 $K\subset U$，其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集，则存在 $n\in N$ 和 $\mathcal{P}_n^*\in\mathcal{P}_n^{<\omega}$ 使得 $K\subset\cup\mathcal{P}_n^*\subset U$. 由于 $K\cap E_n$ 是有限的，所以 $\mathcal{P}_n'^*=\{P\setminus E_n:P\in\mathcal{P}_n^*\}\cup\{\{x\}:x\in K\cap E_n\}\in\mathcal{P}_n'^{<\omega}$ 且 $K\subset\cup\mathcal{P}_n'^*\subset U$，故 $\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n'$ 是 X 的可数 k 网. ▋

推论 4.1.6 设 X 是 k 空间. 若 X 满足下述条件之一，则 X 具有星可数 k 网.

(1) 具有由 $\aleph_1$ 紧子集组成的 σ 紧有限 k 网.

(2) 具有 σ 遗传闭包保持可分 k 网的正则空间.

证明. (1) 设空间 X 具有由 $\aleph_1$ 紧子集组成的 σ 紧有限 k 网，为证明 X 具有星可数 k 网，只须证明若 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧有限集族，A 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集，则 $(\mathcal{P})_A$ 是可数的. 若不然，则存在 A 的不可数子集 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 和 $\mathcal{P}$ 的不可数子集 $\{P_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 使得每一 $x_\alpha\in P_\alpha$. 由于 A 是 $\aleph_1$ 紧的，集 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 有聚点，又由于 X 是 k 空间，存在 X 的紧子集 K 使得 K 含有无限多个 x_α，这与 $\mathcal{P}$ 的紧有限性相矛盾.

(2) 设 X 是具有 σ 遗传闭包保持可分 k 网的正则空间. 由推论 4.1.5, X 的可分子集是 X 的遗传可分子集，再由引理 4.1.3 和(1), X 具有星可数 k 网. ▋

对于空间 X 和 $F\subset W\subset X$, W 称为 F 的弱邻域(序列邻域)，若 W 是 F 中每一点的弱邻域(序列邻域).

定理 4.1.7(刘川[1995]) 具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正规的 k 空间是仿紧空间.

证明. 设 X 是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正规的 k 空间, $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$ 是 X 的 k 网，其中每一

$\mathcal{P}_n$ 是 X 的遗传闭包保持的闭集族且 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$. 由引理 4.1.3 和推论 2.1.4, X 是序列空间.

(7.1) X 的每一离散的闭子集族 $\mathcal{F}$ 有离散的序列邻域闭扩张.

设 $\mathcal{F}$ 是 X 的离散的闭子集族. 记 $\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 对于每一 n∈N, $\alpha\in\Lambda$, 让

$\mathcal{F}_\alpha(n)=\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\alpha\neq\varnothing, P\cap F_\beta=\varnothing,\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$,

$P_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\alpha=\varnothing\}$,

则 $P_\alpha(n)$ 是 X 的闭子集且 $P_\alpha(n)\cap F_\alpha=\varnothing$, 于是存在 X 的开子集 $V_\alpha(n)$ 使得 $F_\alpha\subset V_\alpha(n)\subset cl(V_\alpha(n))\subset X\setminus P_\alpha(n)$, 令 $F_\alpha(n)=(\cup\mathcal{F}_\alpha(n))\cap cl(V_\alpha(n))$. 对于 $\alpha\neq\beta$, 若 $x\in\cup\mathcal{F}_\beta(n)$, 则存在 $P\in\mathcal{P}_n$ 使得 $P\cap F_\beta\neq\varnothing$, $P\cap F_\alpha=\varnothing$ 且 x∈P, 于是 $P\subset P_\alpha(n)$, 从而 $P\cap cl(V_\alpha(n))=\varnothing$, 因此 $x\notin cl(V_\alpha(n))$, 故 $(\cup\mathcal{F}_\beta(n))\cap cl(V_\alpha(n))=\varnothing$. 所以 $\{F_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的互不相交的闭子集族. 由于 $\mathcal{P}_n$ 是遗传闭包保持的, $F_\alpha(n)\subset\cup\mathcal{F}_\alpha(n)$, 且当 $\alpha\neq\beta$ 时有 $\mathcal{F}_\alpha(n)\cap\mathcal{F}_\beta(n)=\varnothing$, 于是 $\{F_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的离散闭子集族.

对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 让 $W_\alpha=\bigcup_{n\in N}F_\alpha(n)$. 显然 $F_\alpha\subset W_\alpha$. 若 S 是 X 中的序列且收敛于 $s\in F_\alpha$, 则存在 $n\in N$ 和 $(\mathcal{P}_n)_s$ 的有限子集 $\mathcal{P}'$ 使得 S 是终于 $\cup\mathcal{P}'$ 的且当 $\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}$ 时有 $(\cup\mathcal{P}')\cap F_\beta=\varnothing$, 于是 $\mathcal{P}'\subset\mathcal{F}_\alpha(n)$, 而 $V_\alpha(n)$ 是 X 的开子集, 从而 S 是终于 $F_\alpha(n)$ 的, 故 W_α 是 F_α 的序列邻域.

令 $\mathcal{W}=\{W_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 对于每一 n≤m 和 $\alpha\neq\beta$, 由于 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_m$, 所以 $\mathcal{F}_\alpha(n)\subset\mathcal{F}_\alpha(m)$, 于是 $F_\alpha(n)\cap F_\beta(m)\subset(\cup\mathcal{F}_\alpha(m))\cap cl(V_\beta(m))=\varnothing$, 从而 $\mathcal{W}$ 是 X 的两两互不相交的子集族. 对于每一 $\Lambda'\subset\Lambda$, 令 $W=\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$. 若 Z 是由 W 中点组成的 X 中的收敛序列, 设 Z 收敛于 z, 让 $F=\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F_\alpha$. 如果 z∈F, 则 z∈W. 如果 z∉F, 则存在 z 的开邻域 V_z 使得 $V_z\cap F=\varnothing$, 从而存在 $n\in N$ 和 $\mathcal{P}^*\in\mathcal{P}_n^{<\omega}$ 使得 $\cup\mathcal{P}^*\subset V_z$, 且 Z 是终于 $\cup\mathcal{P}^*$ 的, 于是当 $\alpha\in\Lambda'$, $n\leq m$ 时有 $(\cup\mathcal{P}^*)\cap F_\alpha(m)\subset P_\alpha(m)\cap cl(V_\alpha(m))=\varnothing$, 因此 $\cup\{F_\alpha(m) : \alpha\in\Lambda', m\geq n\}$ 中仅含有序列 Z 中的有限项. 令 $G=\cup\{F_\alpha(m) : \alpha\in\Lambda', m<n\}$, 则 G 是 X 的闭子集且 G 含有 Z 中的无限项, 故

$z \in G \subset W$. 这表明了 W 是 X 的序列闭集, 所以 W 是 X 的闭子集. 因而 $\mathcal{W}$ 是 X 的闭包保持的子集族, 故 $\mathcal{W}$ 是 X 的离散闭子集族.

(7.2) X 是集态正规空间.

设 $\mathcal{F}$ 是 X 的离散的闭子集族. 记 $\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 由(7.1), 存在 X 的离散的闭子集族的列 $\{\mathcal{W}(n)\}$ 使得 $\mathcal{W}(1)$ 是 $\mathcal{F}$ 的序列邻域扩张且每一 $\mathcal{W}(n+1)$ 是 $\mathcal{W}(n)$ 的序列邻域扩张. 记 $\mathcal{W}(n)=\{W_\alpha(n) : \alpha \in \Lambda\}$, 令 $W_\alpha = \bigcup_{n \in N} W_\alpha(n)$, $\mathcal{W}=\{W_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 则 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{F}$ 的两两互不相交的开扩张. 这只须说明每一 W_α 是 X 的开子集. 设 X 中的序列 Z 收敛于点 $x \in W_\alpha$, 则存在 $n \in N$ 使得 $x \in W_\alpha(n)$, 于是 Z 是终于 $W_\alpha(n+1)$ 的, 所以 Z 是终于 W_α 的, 故 W_α 是 X 的序列开集, 从而 W_α 是 X 的开子集. 因此 X 是集态正规空间.

(7.3) X 是仿紧空间.

由于 X 是 σ 空间, 所以 X 是次仿紧空间, 故从(7.2)知 X 是仿紧空间. █

对于问题 4.1.1(3)的另一回答是下述由高智民证明的结果.

定理 4.1.8(高智民[1992]) 具有 σ 闭包保持弱基的正规空间是仿紧空间.

证明. 设 $\mathcal{P}$ 是正规空间 X 的 σ 闭包保持的闭弱基. 记 $\mathcal{P}=\bigcup_{x \in X} \mathcal{P}_x = \bigcup_{n \in N} \mathcal{P}_n$, 其中每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的弱邻域基, $\mathcal{P}_n$ 是闭包保持的闭子集族且每一 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$.

设 $\mathcal{F}$ 是 X 的离散的闭子集族.

(8.1) $\mathcal{F}$ 有两两互不相交的弱邻域扩张.

设 $\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 对于每一 $n \in N$, $\alpha \in \Lambda$, 令 $E_\alpha(n)=\cup\{P \in \mathcal{P}_n : P \cap F_\beta = \varnothing, \beta \in \Lambda \setminus \{\alpha\}\}$, $G_\alpha = \bigcup_{n \in N}(E_\alpha(n) \setminus \cup\{E_\beta(n) : \beta \in \Lambda \setminus \{\alpha\}\})$, 那么 $F_\alpha \subset G_\alpha$ 且当 $\alpha \neq \beta$ 时有 $G_\alpha \cap G_\beta = \varnothing$. 往证 G_α 是 F_α 的弱邻域.

令 $L_\alpha = \cup\{F_\beta : \beta \in \Lambda \setminus \{\alpha\}\}$, 那么 L_α 是 X 的闭子集且 $F_\alpha \cap L_\alpha = \varnothing$. 对于每一 $x \in F_\alpha$, 存在 $n \in N$ 和 $P_1 \in \mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_n$ 使得 $P_1 \cap L_\alpha = \varnothing$, 于是 $P_1 \subset E_\alpha(n)$. 又因为 $x \notin \cup\{E_\beta(n) : \beta \in \Lambda \setminus \{\alpha\}\}$, 存在 $m \in N$ 和 $P_2 \in \mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_m$ 使得 $P_2 \cap (\cup\{E_\beta(n) : \beta \in \Lambda \setminus \{\alpha\}\}) = \varnothing$. 于是 $P_1 \cap P_2 \subset G_\alpha$, 所以 G_α 是 F_α 的弱邻域.

(8.2) $\mathcal{F}$有离散的弱邻域闭扩张.

对于每一 n∈N，$\alpha\in\Lambda$，令 $F^*_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n: P\subset G_\alpha$ 且存在 $x\in F_\alpha$ 使得 $P\in\mathcal{P}_x\}$，那么 $F^*_\alpha(n)\subset G_\alpha$ 且$\{F^*_\alpha(n): \alpha\in\Lambda\}$是 X 的闭包保持的闭子集族，于是$\{F^*_\alpha(n): \alpha\in\Lambda\}$是离散的. 令 $P_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n: P\cap F_\alpha=\varnothing\}$，则 $P_\alpha(n)$是 X 的闭子集且 $P_\alpha(n)\cap F_\alpha=\varnothing$，于是存在 X 的开子集 $V_\alpha(n)$使得 $F_\alpha\subset V_\alpha(n)\subset cl(V_\alpha(n))\subset X\setminus P_\alpha(n)$. 令 $F_\alpha(n)=F^*_\alpha(n)\cap cl(V_\alpha(n))$，那么$\{F_\alpha(n): \alpha\in\Lambda\}$是 X 的离散闭子集族. 令 $W_\alpha=\bigcup_{n\in N}F_\alpha(n)$，则 W_α是 F_α的弱邻域. 事实上，对于每一 $x\in F_\alpha$，由(8.1)，存在 i∈N 和 $P_3\in\mathcal{P}_x\cap\mathcal{P}_i$使得 $P_3\subset F^*_\alpha(i)$，同时存在 j∈N 和 $P_4\in\mathcal{P}_x\cap\mathcal{P}_j$使得 $P_4\subset V_\alpha(i)$，于是 $P_3\cap P_4\subset F_\alpha(i)\subset W_\alpha$.

令 $\mathcal{W}=\{W_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$. 由于每一 $W_\alpha\subset G_\alpha$，所以 $\mathcal{W}$是 X 的两两互不相交的子集族. 为证 $\mathcal{W}$是离散的，只须证明$\mathcal{W}$是 X 的闭包保持的闭子集族.

对于每一$\Lambda'\subset\Lambda$，设$x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$. 由于$x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F_\alpha$，于是存在k∈N和$P'\in\mathcal{P}_x\cap\mathcal{P}_k$使得 $P'\cap(\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F_\alpha)=\varnothing$，从而当$\alpha\in\Lambda'$，n≥k 时有 $P'\subset P_\alpha(n)$，那么 $P'\cap cl(V_\alpha(n))=\varnothing$，所以 $P'\cap(\cup\{F_\alpha(n): \alpha\in\Lambda', n\geq k\})=\varnothing$. 另一方面，由于$x\notin\cup\{F_\alpha(n): \alpha\in\Lambda', n<k\}$，于是存在 $P''\in\mathcal{P}_x$使得 $P''\cap(\cup\{F_\alpha(n): \alpha\in\Lambda', n<k\})=\varnothing$. 因此$(P'\cap P'')\cap(\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha)=\varnothing$，故 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$是 X 的闭子集.

(8.3) X 是集态正规空间.

对于 X 的离散的闭子集族$\mathcal{H}_1$，由(8.2)，存在 X 的离散的闭子集族的列$\{\mathcal{H}_n\}$使得每一$\mathcal{H}_{n+1}$是$\mathcal{H}_n$的弱邻域闭扩张. 对于每一n∈N，记$\mathcal{H}_n=\{H_\alpha(n): \alpha\in\Lambda\}$. 令$\mathcal{H}=\{H_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$，其中每一 $H_\alpha=\bigcup_{n\in N}H_\alpha(n)$. 对于每一 $x\in H_\alpha$，存在 j∈N 使得 $x\in H_\alpha(j)$，于是存在 $P\in\mathcal{P}_x$使得 $P\subset H_\alpha(j+1)\subset H_\alpha$，从而 H_α是 X 的开子集. 因此，$\mathcal{H}$是$\mathcal{H}_1$的两两互不相交的开扩张，故 X 是集态正规空间.

由于 X 是σ空间，所以 X 是次仿紧空间，故从(8.3)知 X 是仿紧空间. ■

例 4.1.9 具有σ闭包保持基的空间$\not\Rightarrow$k 空间.

如例 1.5.7 的 Michael 空间 $X=N\cup\{p\}$. 由于 N 是 X 的孤立点集, p 在 X 中的开邻域基是 X 的闭包保持集族, 所以 X 具有σ闭包保持基, 但是 X 不是 k 空间. █

由例 1.5.4 知, 具有紧可数闭 k 网的可分, 正则的 k 空间未必是亚 Lindelöf 空间. 刘川和 Tanaka[1996a, 1998a, 1998b]曾提出问题: 具有σ紧有限 k 网的正则的 k 空间是否是亚 Lindelöf 空间? 进一步, 我们提出

问题 4.1.10 具有σ紧有限弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间?

问题 4.1.11 (1) 具有σ局部有限 k 网的正则的 k 空间是否具有σ闭包保持弱基?

(2) 具有σ闭包保持弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间?

4.2 局部可分度量空间的闭映象

Foged[1985]通过遗传闭包保持覆盖建立了度量空间闭映象的特征. 本节也将通过遗传闭包保持覆盖寻求局部可分度量空间的类似特征, 这种特征表现了度量空间的闭映象与局部可分度量空间的闭映象之间的区别. 关于局部可分度量空间闭 s 映象和闭映象的进一步知识我们将在§5.1 和§5.2 中介绍.

Foged 定理是优美的. 在本书的应用中我们只须 Foged 定理的下述特例, 其证明取自 Mizokami, 林寿[1997].

引理 4.2.1 设 X 是可分的正则空间. 若 X 是具有σ遗传闭包保持 k 网的 Fréchet 空间, 则 X 是可分度量空间的闭映象.

证明. 由推论 4.1.5, X 具有可数 k 网. 设$\mathcal{P}=\langle P_i\rangle$是 X 的可数 k 网, 不妨设$\mathcal{P}$关于有限并封闭且每一$P_i$是 X 的闭子集.

(1.1) 若 $x\in U\in\tau$ 且 Z 是 X 中收敛于 x 的序列, 则存在 $i\in N$ 使得 $P_i\subset U$ 且 Z 是终于 $int(P_i)\cup\{x\}$的.

若不然, 记$\{P_i : x\in P_i\subset U\}=\{H_k : k\in N\}$, 那么存在 Z 的子序列$\{z_k\}$使得每一 $z_k\in U\setminus int(\bigcup_{i\le k}H_i)$, 于是存在 $U\setminus\bigcup_{i\le k}H_i$ 中的序列$\{z_{kn}\}$收敛于 z_k, 从而 $x\in cl\{z_{kn} : k, n\in N\}$, 所以存在子序列$\{z_{k_jn_j}\}$收敛于 x. 因为$\mathcal{P}$是 X 的 k 网, 存在 $m\in N$ 使得$\{z_{k_jn_j}\}$是终于 H_m 的, 这与当 $k_j\ge m$ 时有 $z_{k_jn_j}\in U\setminus H_m$ 相矛盾.

对于每一 $i\in N$，记 $\Lambda_i=\{P_i, X\setminus P_i\}$，赋予 Λ_i 离散拓扑．令 $M=\{\alpha=(H_i)\in\prod_{i\in N}\Lambda_i$ ：$\langle cl(H_i)\rangle$ 是 X 中某点 x_α 的网$\}$，则 M 是可分度量空间，并且对于每一 $\alpha\in M$，x_α 是唯一确定的，于是可以定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$，即 $f((H_i))=\bigcap_{i\in N}cl(H_i)$．易验证 f 是连续函数．

(1.2) f 是满函数．

对于每一 $x\in X$，若 x 是 X 的孤立点，则存在 $i\in N$ 使得 $P_i=\{x\}$，于是存在 $(H_i)\in M$ 使得 $f((H_i))=x$．若 x 不是 X 的孤立点，存在 $X\setminus\{x\}$ 中的序列 Z 收敛于 x．对于每一 $i\in N$，存在 $H_i\in\Lambda_i$ 使得 $cl(H_i)\cap Z$ 是无限集．设 $x\in U\in\tau$，由(1.1)，存在 $i\in N$ 使得 $P_i\subset U$ 且 Z 是终于 $int(P_i)\cup\{x\}$ 的，于是 $H_i=P_i$ 且 $x\in cl(H_i)\subset U$．故 $(H_i)\in M$ 且 $f((H_i))=x$．

(1.3) f 是闭映射．

设 F 是 M 的闭子集且 $x\in cl(f(F))\setminus f(F)$，则存在 X 中的收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 和 F 中的序列 $\{\alpha_n\}$ 使得每一 $f(\alpha_n)=x_n$．记 $\alpha_n=(H_{in})\in\prod_{i\in N}\Lambda_i$，则每一 $H_{in}\in\Lambda_i$．按下述方式选取点 $(H_i)\in M$：选取 $H_1\in\Lambda_1$ 使得 $N_1=\{n\in N : H_{1n}=H_1\}$ 是无限集，于是又可选取 $H_2\in\Lambda_2$ 使得 $N_2=\{n\in N_1 : H_{2n}=H_2\}$ 是无限集．继续这种过程，可得到 N 的递减的无限子集列 $\{N_i\}$ 和 $(H_i)\in\prod_{i\in N}\Lambda_i$ 使得 $N_i=\{n\in N_{i-1} : H_{in}=H_i\}$．这时 $\{x_n : n\in N_i\}\subset cl(H_i)$，所以 $cl(H_i)$ 含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项，由(1.2)的论证知 $(H_i)\in M$ 且 $f((H_i))=x$．另一方面，对于每一 $i\in N$，选取 $k_i\in N_i$ 使得 $k_i<k_{i+1}$，那么序列 $\{\alpha_{k_i}\}$ 收敛于 (H_i)，从而 $(H_i)\in F$，因此 $f((H_i))\in f(F)$，矛盾．

综上所述, X 是可分度量空间的闭映象．█

引理 4.2.2 设 $\mathcal{P}$ 是 Fréchet 空间 X 的遗传闭包保持的闭集族．令 $\mathcal{F}=\{\cap\mathcal{P}' : \mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}\}$，则 $\mathcal{F}$ 也是 X 的遗传闭包保持集族．

证明. 若不然，则存在 $\mathcal{F}$ 的子集 $\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$ 和 $H_\alpha\subset F_\alpha$ 使得 $\{H_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$ 不是闭包保持的，于是存在 $x\in cl(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha)\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda}cl(H_\alpha)$．因为 X 是 Fréchet 空间，存在 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，从而存在 $\alpha_n\in\Lambda$ 使得 $x_n\in H_{\alpha_n}$．又因为每一 F_α 是 $\mathcal{P}$ 中有限个元的交，所以存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $\mathcal{P}$ 的无限子集 $\langle P_i\rangle$ 使得每一 $x_{n_i}\in P_i$，于是 $\langle x_{n_i}\rangle$ 是离散的，矛盾．█

引理 4.2.3 设 $f:X\to Y$ 是完备映射, Y 是第一可数空间. 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的第一可数的子集, 则 X 是第一可数空间.

证明. 对于每一 $x\in X$, 记 $y=f(x)$. 设 $<U_i>$ 是 y 在 Y 中的局部基, $<V_i>$ 是 X 的开子集族使得 $<V_i\cap f^{-1}(y)>$ 是 x 在 $f^{-1}(y)$ 中的局部基. 对于每一 $i\in N$, 让 $F_i(x)=f^{-1}(y)\setminus V_i$, 则 $F_i(x)$ 是 X 的紧子集, 所以存在 X 中互不相交的开子集 W_i 和 G_i 使得 $x\in W_i$ 且 $F_i(x)\subset G_i$, 那么 $f^{-1}(y)\subset V_i\cup G_i$. 由引理 1.4.1, 存在 $j_i\in N$ 使得 $f^{-1}(U_{j_i})\subset V_i\cup G_i$, 从而 $(X\setminus V_i)\cap f^{-1}(U_{j_i})\subset G_i$. 不妨设 $W_i\subset V_i$ 且 $W_{i+1}\subset W_i$. 往证 $<W_i\cap f^{-1}(U_i)>$ 是 x 在 X 中的局部基. 设 $x_i\in W_i\cap f^{-1}(U_i)$. 若 x_0 是序列 $\{x_i\}$ 的一个聚点, 由于 $f(x_i)\in U_i$, 于是在 Y 中序列 $\{f(x_i)\}$ 收敛于 y, 所以 $x_0\in f^{-1}(y)$. 如果 $x_0\neq x$, 则存在 $n\in N$ 使得 $x_0\in X\setminus V_n$, 于是 $x_0\in G_n$, 从而有无限个 i 使得 $x_i\in W_n\cap G_n=\varnothing$, 矛盾. 因而, $x_0=x$, 即 $\{x_i\}$ 仅能以 x 为唯一的聚点. 若序列 $\{x_i\}$ 不收敛于 x, 那么存在子序列 $\{x_{i_n}\}$ 在 X 中离散, 由于 f 是完备映射, 不妨设每一 $x_{i_n}\notin f^{-1}(y)$, 于是 $<f(x_{i_n})>$ 在 Y 中离散, 与序列 $\{f(x_{i_n})\}$ 收敛于 y 相矛盾. 故 X 是第一可数空间. ∎

引理 4.2.4 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数覆盖. 让

$\mathcal{H}=\{P\in\mathcal{P}: cl(P)$ 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集$\}$, $\mathcal{F}=\{P\in\mathcal{P}: cl(P)$ 是 X 的紧子集$\}$.

那么

(1) 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部 $\aleph_1$ 紧的且 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网, 则 $\mathcal{H}$ 是 X 的 k 网.

(2) 若 k 空间(序列空间)X 的每一第一可数的闭子空间是局部紧的且 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网(cs*网), 则 $\mathcal{F}$ 是 X 的 k 网(cs*网).

证明. (1) 设空间 X 的每一第一可数的闭子空间是局部 $\aleph_1$ 紧的且 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网. 对于 X 的紧子集 K, 由 Miščenko 的引理 1.3.6, 由 $\mathcal{P}$ 的元组成 K 的有限极小覆盖的族至多是可数的, 设其为 $\{\mathcal{P}_i\}$. 对于每一 $n\in N$, 置 $\mathcal{A}_n=\Lambda_{i\leq n}\mathcal{P}_i$, $A_n=\cup\mathcal{A}_n$, 则 $\{A_n\}$ 是 K 在 X 中递减的网. 如果对于每一 $n\in N$, $cl(A_n)$ 不是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集, 那么 $cl(A_n)$ 含有不可数的离散子集 D_n. 定义 $A=K\cup(\bigcup_{n\in N}D_n)$. $f:A\to A/K$ 是自然商映射, 那么 f 是完备映射, 由推论 2.1.4 和引理 4.2.3, 则

A是X的非局部$\aleph_1$紧的第一可数的闭子集, 矛盾. 因此, 某一cl(A_m)是X的$\aleph_1$紧子集. 设$K\subset U$, 其中U是X的开子集, 则存在$n\geq m$使得$K\subset A_n\subset U$, 即$\mathcal{A}_n\in\mathcal{H}^{<\omega}$且$K\subset\cup\mathcal{A}_n\subset U$, 于是$\mathcal{H}$是X的k网.

(2) 设空间X的每一第一可数的闭子空间是局部紧的. 首先, 设$\mathcal{P}$是k空间X的k网. 对于X的紧子集K, 由Miščenko的引理1.3.6, 由$\mathcal{P}$的元组成K的有限极小覆盖的族至多是可数的, 设其为$\{\mathcal{P}_i\}$. 对于每一$n\in N$, 置$\mathcal{A}_n=\Lambda_{i\leq n}\mathcal{P}_i$, $A_n=\cup\mathcal{A}_n$, 则$\{A_n\}$是K在X中递减的网. 如果对于每一$n\in N$, cl(A_n)不是X的紧子集, 由推论2.1.13, 那么cl(A_n)不是X的可数紧子集, 于是cl(A_n)含有可数的离散子集D_n. 定义$A=K\cup(\bigcup_{n\in N}D_n)$. 由推论2.1.4和引理4.2.3, 则A是X的非局部紧的第一可数的闭子集, 矛盾. 因此, 某一cl(A_m)是X的紧子集. 设$K\subset U$, 其中U是X的开子集, 则存在$n\geq m$使得$K\subset A_n\subset U$, 即$\mathcal{A}_n\in\mathcal{F}^{<\omega}$且$K\subset\cup\mathcal{A}_n\subset U$, 于是$\mathcal{F}$是X的k网.

其次, 设$\mathcal{P}$是序列空间X的cs*网. 设序列$\{x_n\}$在X中收敛于x, 定义$K=[x_n]$. 让U是K在X中的邻域, 则存在$\mathcal{P}$的有限子集列$\{\mathcal{P}_i\}$满足引理1.3.7的条件(1)~(4). 对于每一$n\in N$, 置$A_n=\cup\mathcal{P}_n$, 则$\{A_n\}$是K在X中递减的网. 如果对于每一$n\in N$, cl(A_n)不是X的紧子集, 由推论2.1.13, 那么cl(A_n)不是X的可数紧子集, 于是cl(A_n)含有可数的离散子集D_n. 定义$A=K\cup(\cup_{n\in N}D_n)$. 由引理4.2.3, A是X的非局部紧的第一可数的闭子集, 矛盾. 因此, 某一cl(A_m)是X的紧子集. 取$P\in\mathcal{P}_m$使得$x\in P$且P含有$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$, 这时cl(P)是X的紧子集且$[x_{n_i}]\subset P\subset U$, 故$\mathcal{F}$是X的cs*网. ∎

引理4.2.5 设空间X由族$\mathcal{P}$控制, 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha<\lambda\}$, 令

$F_0=P_0$, $F_\alpha=P_\alpha\setminus\bigcup_{\gamma<\alpha}P_\gamma$, $0<\alpha<\lambda$.

那么

(1) $\{F_\alpha:\alpha<\lambda\}$是X的紧有限覆盖.

(2) 若X是k空间, 则$\{F_\alpha:\alpha<\lambda\}$是X的弱遗传闭包保持覆盖.

(3) 若 X 是 Fréchet 空间，则$\{cl(F_\alpha): \alpha<\lambda\}$是 X 的遗传闭包保持覆盖.

证明. (1) 显然，$\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的覆盖. 对于 X 的任一非空紧子集 K，若存在$\alpha_n<\alpha_{n+1}<\lambda$使得每一 $K\cap F_{\alpha_n}\neq\varnothing$. 取 $x_n\in K\cap F_{\alpha_n}$，令 F=$<x_n>$，则 $F\subset\bigcup_{n\in N}P_{\alpha_n}$ 且每一 $F\cap P_{\alpha_n}\subset\{x_i : i\le n\}$，于是 F 是 X 的无限离散子集，这与 K 的紧性相矛盾. 故$\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的紧有限覆盖.

(2) 对于每一$\alpha<\lambda$，任取 $x_\alpha\in F_\alpha$，记 H=$\{x_\alpha : \alpha<\lambda\}$. 对于任一 $A\subset H$ 和 X 的紧子集 K，由(1)，$K\cap A$ 是有限集，所以 A 是 X 的闭子集，于是 H 是 X 的离散子集. 故$\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的弱遗传闭包保持覆盖.

(3) 我们先证明$\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的遗传闭包保持集族. 若不然，则存在 F_α 的子集 A_α 和 $x\in cl(\bigcup_{\alpha<\lambda}A_\alpha)\setminus\bigcup_{\alpha<\lambda}cl(A_\alpha)$，由于 X 是 Fréchet 空间，存在$\bigcup_{\alpha<\lambda}A_\alpha$ 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x，于是有$\alpha_n<\lambda$使得 $x_n\in A_{\alpha_n}$，这时所有的 $x_n\neq x$. 不妨设这些α_n是互不相同的，由(2)知，$<x_n>$是 X 的闭子集，这与序列$\{x_n\}$收敛于 x 相矛盾. 故$\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的遗传闭包保持集族.

其次，证明$\{cl(F_\alpha): \alpha<\lambda\}$也是 X 的遗传闭包保持集族. 对于 $cl(F_\alpha)$的闭子集B_α，若存在 $y\in cl(\bigcup_{\alpha<\lambda}B_\alpha)\setminus\bigcup_{\alpha<\lambda}B_\alpha$，由于 X 是 Fréchet 空间，存在$\bigcup_{\alpha<\lambda}B_\alpha$ 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y，于是有$\alpha_n<\lambda$使得 $y_n\in B_{\alpha_n}$，这时所有的 $y_n\neq y$. 不妨设这些α_n是互不相同的，且 $y_n\in cl(F_{\alpha_n})\setminus F_{\alpha_n}$，从而存在 F_{α_n} 中的序列$\{y_{nm}\}$收敛于 y_n，因此 $y\in cl\{y_{nm} : n, m\in N\}$，于是存在子序列$\{y_{n_j m_j}\}$收敛于 y，从而每一 F_{α_n} 仅含有序列$\{y_{n_j m_j}\}$的有限项，不妨设每一 F_{α_n} 至多仅含有序列$\{y_{n_j m_j}\}$中的一项，于是$<y_{n_j m_j}>$是 X 的闭子集，这与序列$\{y_{n_j m_j}\}$收敛于 y 相矛盾. 故$\{cl(F_\alpha) : \alpha<\lambda\}$是 X 的遗传闭包保持集族. ∎

下面证明本节的主要定理.

定理 4.2.6(林寿，刘川，戴牧民[1997]) 对于正则空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的闭映象.

(2) X 是度量空间的闭映象且 X 的每一第一可数的(闭)子空间是局部可分的.

(3) X 是具有σ 遗传闭包保持可分 k 网的 Fréchet 空间.

(4) X 是具有由$\aleph_0$子空间组成的σ遗传闭包保持 k 网的 Fréchet 空间.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 设 A 是 X 的第一可数的子空间, 则存在局部可分度量空间 B 和闭映射 f:B$\rightarrow$A. 对于每一 x$\in$A, 由定理 1.3.3, ∂f^{-1}(x)是 B 的紧子集, 再由引理 1.3.2, 不妨设 f 是完备映射, 从而 A 是 X 的局部可分的度量子空间.

(2)$\Rightarrow$(4). 由引理 1.4.3, X 是 Fréchet 空间. 设 f:M$\rightarrow$X 是闭映射, 其中 M 是度量空间. 让$\mathcal{B}$是 M 的σ局部有限基. 由引理 2.2.4, f($\mathcal{B}$)是 X 的σ遗传闭包保持 k 网. 由引理 4.1.2 和引理 4.2.2, 不妨设 X 有 k 网$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$, 其中每一$\mathcal{P}_n$是 X 的关于有限交封闭的遗传闭包保持的闭集族且$\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对于每一 n$\in$N, 置 D_n={x$\in$X : $(\mathcal{P}_n)_x$ 不是有限的}, $\mathcal{F}_n$={P$\setminus D_n$: P$\in\mathcal{P}_n$}$\cup$ {{x} : x$\in D_n$}. 由引理 4.1.3, 有

(6.1) D_n是 X 的离散子集;

(6.2) $\mathcal{F}_n$是 X 的关于有限交封闭的紧有限集族;

(6.3) $\mathcal{F}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{F}_n$是 X 的 k 网.

定义

$\mathcal{H}$={F$\in\mathcal{F}$: cl(F)是 X 的$\aleph_1$紧子集}.

由(6.1)和推论 4.1.5, $\mathcal{H}$是 X 的由$\aleph_0$子空间组成的σ遗传闭包保持的子集族. 我们证明$\mathcal{H}$是 X 的 k 网. 对于 K$\subset$U, 其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集, 因为$\mathcal{F}$是 X 的紧可数覆盖, 存在至多可数个由$\mathcal{F}$的元组成 K 的有限覆盖, 记其为$<\mathcal{R}_i>$. 对于每一 n$\in$N, 让 $A_n=\cup(\wedge_{i\le n}\mathcal{R}_i)$. 由(6.3), {$A_n$}是 K 在 X 中递减的网. 由于 X 的每一第一可数的闭子空间是局部$\aleph_1$紧的, 从引理 4.2.4 的证明, 存在 m$\in$N 使得 $A_m\subset$U 且 cl(A_m)是 X 的$\aleph_1$紧的子空间. 因为 A_m是$\mathcal{F}$的元的有限交的有限并, 由(6.2), 存在$\mathcal{G}\in\mathcal{F}^{<\omega}$, n$\in$N 和 D$\subset D_n$使得 A_m=($\cup\mathcal{G}$)$\cup$D. 置$\mathcal{H}'$=$\mathcal{G}\cup$ {{x} : x$\in$K$\cap$D}, 则$\mathcal{H}'\in\mathcal{H}^{<\omega}$且K$\subset\cup\mathcal{H}'\subset$U. 因此, $\mathcal{H}$是X的k网. 故X具有由$\aleph_0$子空间组成的σ遗传闭包保持 k 网的 Fréchet 空间.

(4)$\Rightarrow$(3)是显然的. 下面证明(3)$\Rightarrow$(1). 设 Fréchet 空间 X 有σ遗传闭包保持的可分 k 网$\mathcal{P}$. 记$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$, 其中每一$\mathcal{P}_n$是 X 的遗传闭包保持的闭子集族, $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$且$\mathcal{P}_n$的每一元是 X

的可分子空间. 对于每一 $n\in N$, 置 $P_n=\cup\mathcal{P}_n$, $F_n=P_n\setminus P_{n-1}$, 其中 $F_0=\varnothing$. 那么$\langle P_n\rangle$是 X 的闭覆盖且 $P_n\subset P_{n+1}$. 因为 X 是 k 空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网, X 关于$\langle P_n\rangle$具有弱拓扑, 于是 X 由$\langle P_n\rangle$控制. 又因为 X 是 Fréchet 空间, 由引理 4.2.5, $\langle F_n\rangle$是 X 的遗传闭包保持覆盖. 定义

$\mathcal{F}=\{P\setminus P_{n-1}: n\in N, P\in\mathcal{P}_n\}=\{F_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$,

$Z=\oplus_{\alpha\in\Lambda}cl(F_\alpha)$,

$f:Z\to X$ 是显然映射.

易验证, $\mathcal{F}$ 是 X 的遗传闭包保持覆盖, 于是 f 是闭映射. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 由推论 4.1.5 和引理 4.2.1, 存在可分度量空间 M_α 和闭映射 $g_\alpha:M_\alpha\to cl(F_\alpha)$. 定义 $M=\oplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$, $g=f\circ(\oplus_{\alpha\in\Lambda}g_\alpha):M\to X$. 则 g 是从局部可分度量空间 M 到 X 上的闭映射, 于是 X 是局部可分度量空间的闭映象. ∎

4.3 控制族与闭映射

空间的遗传闭包保持的闭覆盖是控制族. 用控制族来刻画 Lašnev 空间更具有一般性. Tanaka 和周浩旋[1985/86]讨论了由度量空间族控制的广义度量空间的可度量性质. Lašnev 空间未必由度量空间族控制. 1983 年 T. Miwa(Tanaka 和周浩旋[1985/86])曾提出下述问题.

问题 4.3.1 设 Y 是度量空间. 如果 B 是 Y 的闭子集, 那么 Lašnev 空间 Y/B 是否由度量空间族控制?

Tanaka 和周浩旋[1985/86]构造了反例否定了 Miwa 问题. 由于控制族在 CW 复形及广义度量空间理论中的重要位置, 进一步探讨 Miwa 问题是很有意义的, 如寻求 Lašnev 空间是由度量空间族控制的充要条件是一个有趣的问题. 这是本节介绍的第一部分内容. 与 Miwa 问题相关的另一类空间是正规度量空间, 它可以刻画为任一闭映象是可度量空间(定理 1.3.4), 本节的第二部分内容是讨论“任一闭映象是由度量空间族控制的度量空间”的特征.

引理 4.3.2 设空间 X 由度量空间族控制, 则 X 具有σ紧有限 k 网.

证明. 设空间 X 由度量空间族$\{P_\alpha: \alpha<\lambda\}$控制. 令 $F_0=P_0$, $F_\alpha=P_\alpha\setminus\bigcup_{\gamma<\alpha}P_\gamma$, $0<\alpha<\lambda$. 由引理 4.2.5, $\{F_\alpha: \alpha<\lambda\}$是 X 的紧有限覆盖. 对于每一$\alpha<\lambda$, 让 $\mathcal{F}_\alpha$ 是 F_α 的σ紧有限 k 网. 令 $\mathcal{F}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_\alpha$, 则 $\mathcal{F}$ 是 X 的σ紧有限 k 网. ∎

定理 4.3.3(Tanaka[1987a]) 设空间 X 由度量空间族控制，则 X 是度量空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

证明. 只须证明充分性. 设空间 X 由度量空间族控制且 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω，由引理 4.3.2 和推论 2.1.11, X 是第一可数空间. 由引理 4.2.5, X 具有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖，于是 X 是度量空间的闭映象，再由定理 1.3.3, X 是度量空间. ∎

引理 4.3.4 让 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的星可数覆盖，则 $\mathcal{P}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha$，其中每一 $\mathcal{P}_\alpha$ 是可数的. 令 $X_\alpha=\cup\mathcal{P}_\alpha$，那么

(1) $X_\alpha\cap X_\beta\neq\varnothing$ 当且仅当 $\alpha=\beta$.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网，则每一 $\mathcal{P}_\alpha$ 是 X_α 的可数 k 网.

(3) 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网，则$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是紧有限的. 若 X 是 k 空间，则$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是弱遗传闭包保持的. 若 X 是正则的 k 空间，则对于每一可数的 $\Gamma\subset\Lambda$ 存在 Λ 的可数子集 Σ 使得 $\mathrm{cl}_s(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha)\subset\bigcup_{\alpha\in\Sigma}X_\alpha$.

证明. 设$\mathcal{P}=\{P_\gamma : \gamma\in\Omega\}$是空间X的星可数覆盖. 对于$\gamma,\delta\in\Omega$，定义$\gamma\sim\delta$ 当且仅当存在 $P_1, P_2, \ldots, P_n\in\mathcal{P}$ 使得 $P_\gamma\cap P_1\neq\varnothing, \ldots, P_i\cap P_{i+1}\neq\varnothing, \ldots, P_n\cap P_\delta\neq\varnothing$. 由这定义的~是 Ω 上的等价关系，于是指标集 Ω 被分解为两两互不相交的可数子集之并 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\Omega_\alpha$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$，让 $\mathcal{P}_\alpha=\{P_\gamma : \gamma\in\Omega_\alpha\}$. 则 $\mathcal{P}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha$ 且每一 $\mathcal{P}_\alpha$ 是可数的. 显然, $X_\alpha\cap X_\beta\neq\varnothing$ 当且仅当 $\alpha=\beta$. 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网，那么对于每一 $\alpha\in\Lambda$, $\mathcal{P}_\alpha$ 是 X_α 的可数 wcs*网，这时 $\mathcal{P}_\alpha$ 也是 X_α 的可数网，所以 X_α 的每一紧子集是第一可数的，由引理 2.1.6, $\mathcal{P}_\alpha$ 是 X_α 的 k 网. 下面证明(3)成立.

设$\mathcal{P}$是X的k网. 让K是X的紧子集，存在$\mathcal{P}$的有限子族$\mathcal{P}'$有$K\subset\cup\mathcal{P}'$. 记$\mathcal{P}'=\{P_i : i\leq n\}$. 对于每一 P_i，存在 X_{α_i} 使得 $P_i\subset X_{\alpha_i}$，因此 $K\subset\bigcup_{i\leq n}X_{\alpha_i}$. 由(1)，对于每一 $\alpha\in\Lambda\setminus\{\alpha_i : i\leq n\}$，K 与 X_α 不相交，所以$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是紧有限的. 从而当 X 是 k 空间时, $\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$在 X 中是弱遗传闭包保持的.

设 X 是正则的 k 空间. 让Γ是Λ的可数子集, 为证明的简明起见, 记 $cl_s(\bigcup_{\delta\in\Gamma}X_\delta)=[\Gamma]_s$.
设对于Λ的任一可数子集Σ, $[\Gamma]_s\not\subset\bigcup_{\alpha\in\Sigma}X_\alpha$, 则可选取$\Lambda\setminus\Gamma$的子集$\{\mu_\alpha : \alpha<\omega_1\}$和 X 的子集 $A=\{x_\alpha : \alpha<\omega_1\}$使得每一$x_\alpha\in X_{\mu_\alpha}\cap[\Gamma]_s$, 且当$\alpha\neq\beta$时有$\mu_\alpha\neq\mu_\beta$. 那么 A 是 X 的离散子集, 于是对于每一$\alpha<\omega_1$, 存在 x_α 的邻域 U_α 使得 $cl(U_\alpha)\cap A=\{x_\alpha\}$, 且存在$\bigcup_{\delta\in\Gamma}X_\delta$中的序列$\{x_{\alpha n}\}$收敛于$x_\alpha$. 因为$\mathcal{P}$是 k 网, 于是又存在$P_\alpha\in\bigcup_{\delta\in\Gamma}\mathcal{P}_\delta$使得$P_\alpha\subset U_\alpha$且$P_\alpha$含有序列$\{x_{\alpha n}\}$的无限项, 因此 $cl(P_\alpha)\cap A_\alpha=\{x_\alpha\}$, 特别地当$\alpha\neq\beta$时有 $P_\alpha\neq P_\beta$, 这与$\bigcup_{\delta\in\Gamma}\mathcal{P}_\delta$的可数性相矛盾. ∎

形如引理 4.3.4 的$\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$或$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$分别称为$\mathcal{P}$或 X 的星可数分解. 由引理 4.3.4, 具有星可数 k 网的空间具有σ紧有限 k 网, 具有星可数 k 网的 k 空间具有σ弱遗传闭包保持 k 网.

下述定理完满地回答了问题 4.3.1, 为了定理证明的方便, 我们引用 McCoy, Ntantu[1988]的下述术语: 空间 X 的覆盖$\mathcal{P}$称为 X 的 K 覆盖, 若 X 的每一紧子集含于$\mathcal{P}$的某元中.

定理 4.3.5(林寿[1997b]; Tanaka, 周浩旋[1985/86]) 设 $f:Z\to X$ 是闭映射, 其中 Z 是度量空间, 则下述条件相互等价:

(1) X 由度量空间族控制.

(2) X 有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖.

(3) X 有σ遗传闭包保持的可度量的闭 k 网.

(4) f 满足

(a) 每一$\partial f^{-1}(x)$是 Z 的局部紧子集.

(b) $\{x\in X: \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集.

证明. 由引理 4.2.5 知(1)$\Leftrightarrow$(2).

(2)$\Rightarrow$(4). 设 X 有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖$\mathcal{P}$. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 先证明 f 满足条件(a). 对于每一$z\in\partial f^{-1}(x)$, 让$\langle V_n\rangle$是 z 在 Z 中递减的局部基, 则某个$f(V_n)$含于$\mathcal{P}$的有限子集的并中. 否则, 存在 X 中的序列$\{x_n\}$和$\Lambda$的子集$\langle\alpha_n\rangle$使得每一$x_n\in f(V_n)\cap P_{\alpha_n}\setminus\bigcup_{i<n}P_{\alpha_i}$,

从而$<x_n>$是 X 的离散子集且序列$\{x_n\}$收敛于 x, 矛盾. 因此, 存在 $m\in N$ 和Λ的有限子集Λ'使得 $V_m\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}f^{-1}(P_\alpha)$. 于是 $V_m\cap\partial f^{-1}(x)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\partial f_\alpha^{-1}(x)$, 其中 $f_\alpha=f_{|f^{-1}(P_\alpha)}$. 由定理 1.3.3, 每一$\partial f_\alpha^{-1}(x)$是 X 的紧子集, 故$\partial f^{-1}(x)$是局部紧的.

其次, 证明 f 满足条件(b). 令 $D=\{x\in X:(\mathcal{P})_x$ 不是有限的$\}$. 由引理 4.1.3 的(3.1), 对于 X 的任一紧子集 K, $K\cap D$ 是有限集. 因为 X 是 k 空间, 所以 D 是 X 的离散子集. 要证 f 满足条件(b)只须证$\{x\in X:\partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}\subset D$. 若 $x\in X\setminus D$, 那么$(\mathcal{P})_x$是有限的, 令 $V=X\setminus\cup\{P\in\mathcal{P}:x\notin P\}$, 则 V 是 x 在 X 中的开邻域 V 且 $V\subset\bigcup(\mathcal{P})_x$, 所以 V 是 X 的第一可数的开子集, 因此 X 在 x 具有可数的局部基. 由定理 1.3.3, $\partial f^{-1}(x)$是 Z 的紧子集. 故(b)成立.

(4)$\Rightarrow$(3). 设 f 满足条件(a)和(b). 由引理 1.3.2, 不妨设 f 满足

(5.1) 每一 $f^{-1}(x)$是 Z 的局部紧子集.

(5.2) $\{x\in X:f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集.

记

$L=\{x\in X: f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}=\{x_\alpha:\alpha<\lambda\}$, $F_\alpha=f^{-1}(x_\alpha)$, $\alpha<\lambda$.

那么

(5.3) 若每一 F_α 是 Z 的 Lindelöf 子空间, 那么存在 X 的可度量的递增的闭覆盖$<D_n>$使得$<D_n>$是 X 的 K 覆盖.

对于每一$\alpha<\lambda$, 由于 F_α 是 Z 的局部紧的 Lindelöf 子空间, 存在 F_α 的递增的紧覆盖$<K_\alpha^n>$使得$<K_\alpha^n>$是 F_α 的 K 覆盖. 由 L 的离散性及 Z 的可度量性, 存在 Z 的离散开子集族$\{G_\alpha:\alpha<\lambda\}$使得每一$F_\alpha\subset G_\alpha$. 设 d 是 Z 上的度量, 对于$F\subset Z$, $n\in N$, 记 $S_n(F)=\{z\in Z: d(z, F)<1/n\}$. 置

$G_\alpha^n=G_\alpha\cap S_n(F_\alpha\setminus K_\alpha^n)$, $n\in N$, $\alpha<\lambda$

$Z_n=Z\setminus\bigcup_{\alpha<\lambda}G_\alpha^n$, $D_n=f(Z_n)$,

$f_n=f_{|Z_n}:Z_n\to D_n$.

那么$\langle Z_n \rangle$是 Z 的递增的闭覆盖, f_n是闭映射, 于是$\langle D_n \rangle$是 X 的递增的闭覆盖且对于每一$x \in D_n$有

$$(f_n)^{-1}(x)=\begin{cases} K_\alpha^n \setminus G_\alpha^n, & \text{存在}\alpha<\lambda\text{使得}x=x_\alpha \\ f^{-1}(x)\cap Z_n, & x\in D_n\setminus L \end{cases},$$

从而 f_n 是完备映射, 所以 D_n 是 X 的可度量子空间. 若存在 X 的紧子集 K 使得每一$D_n \not\supset K$, 则存在K的序列$\{x_n\}$使得每一$x_n \in K \setminus D_n$, 这时$\langle x_n \rangle$是紧度量空间K的无限子集, 于是存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$收敛于K中的某点x且所有的$x_{n_i} \neq x$. 对于每一$m \in N$, $D_m \cap \langle x_{n_i} \rangle$是有限集, 所以存在 $i_m \in N$ 使得当 $i \geq i_m$ 时有 $x_{n_i} \in X \setminus D_m \subset f(\bigcup_{\alpha<\lambda} G_\alpha^m)$, 从而存在$z_i \in f^{-1}(x_{n_i}) \cap (\bigcup_{\alpha<\lambda} G_\alpha^m)$. 由引理 2.2.3, $\{z_i\}_{i \geq i_m}$存在收敛的子序列, 设 z 是$\{z_i\}_{i \geq i_m}$的一个聚点, 那么 $z \in f^{-1}(x) \cap cl(\bigcup_{\alpha<\lambda} G_\alpha^m)$. 由于$\{G_\alpha^m : \alpha<\lambda\}$是 Z 的离散集族, 于是$cl(\bigcup_{\alpha<\lambda} G_\alpha^m)=\bigcup_{\alpha<\lambda} cl(G_\alpha^m)$, 所以存在$\alpha<\lambda$使得 $z \in cl(G_\alpha^m) \subset cl(S_m(F_\alpha \setminus K_\alpha^m)) \subset S_{m-1}(F_\alpha \setminus K_\alpha^m)$, 从而有$p_m \in F_\alpha \setminus K_\alpha^m$使得$d(z, p_m)<1/(m-1)$. 又由于$G_\alpha^{m+1} \subset G_\alpha^m \subset G_\alpha$, 对于任意的$m \in N$, α是固定不变的. 这时序列$\{p_m\}$收敛于 $z \in F_\alpha$, 因此对于某个 $n \in N$ 有$[p_m] \subset K_\alpha^n$, 矛盾. 故$\langle D_n \rangle$是 X 的 K 覆盖.

现在, 对于$\alpha<\lambda$, F_α是 Z 的局部紧的可度量子空间, 于是F_α具有由 Lindelöf 子空间组成的星可数开覆盖. 由引理 4.3.4, F_α可表为 Lindelöf 子空间的拓扑和, 记$F_\alpha=\oplus_{\beta<\gamma} L_\alpha^\beta$, 其中每一$L_\alpha^\beta$是 Lindelöf 的. 这时$\{L_\alpha^\beta : \alpha<\lambda, \beta<\gamma\}$是 Z 的离散闭集族, 于是存在 Z 的离散开子集族$\{G_\alpha^\beta : \alpha<\lambda, \beta<\gamma\}$使得每一$L_\alpha^\beta \subset G_\alpha^\beta$. 置

$Z_\beta=cl(\bigcup_{\alpha<\lambda} G_\alpha^\beta)$, $X_\beta=f(Z_\beta)$, $\beta<\gamma$,

$Z_\gamma=cl(Z \setminus \bigcup_{\alpha<\lambda} G_\alpha^\beta)$, $X_\gamma=f(Z_\gamma)$,

$f_\beta=f_{|Z_\beta}: Z_\beta \to X_\beta$, $\beta \leq \gamma$.

那么$\{Z_\beta : \beta \leq \gamma\}$是 Z 的局部有限的闭覆盖, f_β是闭映射, 于是$\{X_\beta : \beta \leq \gamma\}$是 X 的遗传闭

包保持的闭覆盖且对于每一 $x\in X_\beta$ 有

$$(f_\beta)^{-1}(x)=\begin{cases} L_\alpha^\beta \text{，存在}\alpha<\lambda\text{使得}x=x_\alpha \\ f^{-1}(x)\cap Z_\beta,\ x\in X_\beta\setminus L, \end{cases}$$

从而$(f_\beta)^{-1}(x)$是 Z_β 的 Lindelöf 子空间．由(5.3), X_β 存在可度量的闭覆盖$\langle D_\beta^n\rangle$使得$\langle D_\beta^n\rangle$是 X_β 的K覆盖．由于D_β^n是可度量空间，让$\bigcup_{m\in N}\mathcal{B}_\beta^{n,m}$是$D_\beta^n$的闭k网，其中每一$\mathcal{B}_\beta^{n,m}\subset\mathcal{B}_\beta^{n,m+1}$且$\mathcal{B}_\beta^{n,m}$是 D_β^n的局部有限集族．置$\mathcal{H}^{n,m}=\bigcup_{\beta\le\gamma}\mathcal{B}_\beta^{n,m}$，那么$\mathcal{H}^{n,m}$是 X 的由可度量子空间组成的遗传闭包保持的闭集族．再置$\mathcal{H}=\bigcup_{n,m\in N}\mathcal{H}^{n,m}$．

(5.4) $\mathcal{H}$是 X 的 k 网.

对于$K\subset U$，其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集．置$D=\{x\in K:\{X_\beta:\beta\le\gamma\}$在 x 不是点有限的$\}$．因为$\{X_\beta:\beta\le\gamma\}$是 X 的遗传闭包保持的闭覆盖，由引理 4.1.3的(3.1), D 是有限集且$\{K\cap X_\beta\setminus D:\beta\le\gamma\}$是有限族，于是存在有限个$\beta_i\le\gamma$使得$K\subset\bigcup_{i\le j}X_{\beta_i}$．对于$i\le j$，存在 $n_i\in N$ 使得 $K\cap X_{\beta_i}\subset D_{\beta_i}^{n_i}$，于是存在 $m_i\in N$ 和 $\mathcal{B}_{\beta_i}^{n_i,m_i}$ 的有限子族 $\mathcal{B}_i$ 使得 $K\cap X_{\beta_i}\subset\cup\mathcal{B}_i\subset U$．令$\mathcal{H}'=\bigcup_{i\le j}\mathcal{B}_i$，那么$\mathcal{H}'$是$\mathcal{H}$的有限子族且$K\subset\cup\mathcal{H}'\subset U$．故 X 有$\sigma$遗传闭包保持的可度量的闭 k 网.

(3)$\Rightarrow$(2)．设 X 有σ遗传闭包保持的可度量的闭 k 网．由定理 4.2.6 的(3)$\Rightarrow$(1)的证明知，X 有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖．█

推论 4.3.6 若 Y 是度量空间，B 是 Y 的闭子集，那么 Y/B 由度量空间族控制当且仅当∂B是 Y 的局部紧的子空间．█

定理 4.3.7(Siwiec[1976]; Tanaka，刘川[1999]) 设 $f:Z\to X$ 是闭映射，其中 Z 是度量空间，那么下述条件相互等价:

(1) X 由度量空间的可数族控制.

(2) X 有σ局部有限的可度量的闭 k 网.

(3) X 有点可数的可度量的闭 k 网.

(4) X 有点可数的可度量的 cs*网且$\{x\in X:\partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集.

(5) f 满足

(a) 每一$\partial f^{-1}(x)$是 Z 的局部紧的 Lindelöf 子集.

(b) $\{x\in X:\ \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 设空间 X 由度量空间的可数族控制，由引理 4.2.5, X 具有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖$\langle X_n\rangle$. 设 $\mathcal{P}_n$ 是 X_n 的σ 局部有限的闭 k 网. 由定理 4.3.5 的(5.4)的证明知, $<\bigcup_{i\le n} X_i>$是 X 的 K 覆盖，于是$\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$是 X 的$\sigma$ 局部有限的可度量的闭 k 网.

(2)$\Rightarrow$(4). 设空间 X 具有σ 局部有限的可度量的闭 k 网. 显然, X 具有点可数的可度量的 cs*网. 由定理 4.3.5, $\{x\in X:\ \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集.

(4)$\Rightarrow$(3). 设空间 X 有点可数的可度量的 cs*网$\mathcal{P}$且$\{x\in X:\ \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集. 由引理 1.3.2, 不妨设 $L=\{x\in X:\ f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集. 让 $L=\{x_\alpha:\ \alpha<\lambda\}$, 那么存在 X 的离散开子集族$\{V_\alpha:\ \alpha<\lambda\}$使得每一 $x_\alpha\in V_\alpha$. 令 $\mathcal{F}=\{cl(P\cap V_\alpha): x_\alpha\in P\in\mathcal{P},\ \alpha<\lambda\}\bigcup\{f(Z\setminus S_n(f^{-1}(L))): n\in N\}$. 则$\mathcal{F}$是 X 的点可数的闭覆盖. 首先，证明$\mathcal{F}$的每一元是可度量的. 对于每一 $n\in N$, 若 $x\in X\setminus L$, 则 $f^{-1}(x)$是 Z 的紧子集，由定理 1.3.3, $X\setminus L$ 的子集 $f(Z\setminus S_n(f^{-1}(L)))$是可度量的. 对于每一 $x_\alpha\in P\in\mathcal{P}$, 若 $x\in cl(P\cap V_\alpha)$, 如果$x\neq x_\alpha$，那么$f^{-1}(x)$是 Z 的紧子集，于是 x 在子空间 $cl(P\cap V_\alpha)$中具有可数局部基; 如果$x=x_\alpha$，那么 x 在子空间 $P\cap V_\alpha$ 中具有可数局部基, 因为 X 是正则空间, 所以 x 在子空间 $cl(P\cap V_\alpha)$中具有可数局部基. 因此 $cl(P\cap V_\alpha)$也是可度量的. 其次，证明$\mathcal{F}$是 X 的 cs*覆盖. 设$\{x_i\}$是 X 中收敛于某点 x 的序列. 由引理 1.4.2, 存在 Z 中收敛于某点 z 的序列$\{z_n\}$使得$\{f(z_n)\}$是$\{x_i\}$的子序列且 $x=f(z)$. 若存在$\alpha<\lambda$使得 $x=x_\alpha$，则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得$\{f(z_n)\}$的某个子序列是终于 $cl(P\cap V_\alpha)$的. 若 $x\in X\setminus L$, 那么存在 $n\in N$ 使得 $Z\setminus S_n(f^{-1}(L))$是 z 的闭邻域，于是序列$\{f(z_n)\}$是终于 $f(Z\setminus S_n(f^{-1}(L)))$的. 故$\mathcal{F}$是 X 的 cs*覆盖.

令$\mathcal{F}=\{F_\beta:\ \beta\in\Gamma\}$. 对于每一$\beta\in\Gamma$，让$\mathcal{F}_\beta$是$F_\beta$的点可数的闭 cs*网. 再令$\mathcal{G}=\bigcup_{\beta\in\Gamma}\mathcal{F}_\beta$，则$\mathcal{G}$是 X 的点可数的可度量的闭 cs*网. 由引理 2.1.6, $\mathcal{G}$是 X 的 k 网.

(3)$\Rightarrow$(5). 设空间 X 具有点可数的可度量的闭 k 网$\mathcal{G}$.

首先，证明每一$\partial f^{-1}(x)$是Z的Lindelöf子空间．若不然，则存在$x_0\in X$使得$\partial f^{-1}(x_0)$不是Z的Lindelöf子空间，于是存在$\partial f^{-1}(x_0)$的子集$\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$以及X的离散开子集族$\{D_\alpha:\alpha<\omega_1\}$使得每一$x_\alpha\in D_\alpha$．对于每一$\alpha<\omega_1$，若V是X中含$x_0$的开子集，那么$f^{-1}(V)\cap(D_\alpha\setminus f^{-1}(x_0))\neq\varnothing$，即$V\cap(f(D_\alpha)\setminus\{x_0\})\neq\varnothing$，于是$x_0\in cl(f(D_\alpha)\setminus\{x_0\})$．因为X是Fréchet空间，存在$f(D_\alpha)\setminus\{x_0\}$中的序列$\{x_{\alpha n}\}$收敛于$x_0$．由于$\{cl(f(D_\alpha)):\alpha<\omega_1\}$是X的遗传闭包保持集族，$\{[x_{\alpha n}]:\alpha<\omega_1\}$是X的遗传闭包保持集族．由引理4.1.3的(3.1)和超限归纳法，不妨设$\{\langle x_{\alpha n}\rangle:\alpha<\omega_1\}$是两两互不相交的集族．这时，X的闭子空间$\bigcup_{\alpha<\omega_1}[x_{\alpha n}]$同胚于$S_{\omega_1}$．由例1.5.2, X不含有闭子空间同胚于$S_{\omega_1}$.矛盾．故每一$\partial f^{-1}(x)$是Z的Lindelöf子空间.

其次，证明对于每一$x\in X$，$\partial f^{-1}(x)$是Z的局部紧子集．对于每一$z\in\partial f^{-1}(x)$，让$\langle V_n\rangle$是z在Z中递减的局部基，于是$\{f(V_n)\}$是x在X中递减的网．由引理2.1.5，$\mathscr{G}$满足条件(A)，从而存在$\mathscr{G}'\in\mathscr{G}^{<\omega}$使得$x\in int_s(\cup\mathscr{G}')$．由引理1.4.10和引理1.4.7，$\cup\mathscr{G}'$是x在X中的邻域，因此存在$m\in N$使得$f(V_m)\subset\cup\mathscr{G}'$．令$\mathscr{G}'=\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，则$V_m\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(G_\alpha)$．于是$V_m\cap\partial f^{-1}(x)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\partial f_\alpha^{-1}(x)$，其中$f_\alpha=f_{|f^{-1}(G_\alpha)}$．由定理1.3.3，每一$\partial f_\alpha^{-1}(x)$是X的紧子集，故$\partial f^{-1}(x)$是局部紧的.

最后，证明$\{x\in X:\partial f^{-1}(x)$不是Z的紧子集$\}$是X的离散子集．令

C=$\{x\in X:\partial f^{-1}(x)$是Z的紧子集$\}$,

D=$\{x\in X:$存在$(\mathscr{G})_x$的有限子集$\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$使得$\partial f^{-1}(x)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\partial f_\alpha^{-1}(x)\}$,

E=$\{x\in X:$存在$\mathscr{G}'\in\mathscr{G}^{<\omega}$使得$x\in int(\cup\mathscr{G}')\}$.

显然，$D\subset C$．若$x\in E$，则存在$\mathscr{G}'\in\mathscr{G}^{<\omega}$使得$x\in int(\cup\mathscr{G}')$．让$\mathscr{G}'=\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，那么$\partial f^{-1}(x)\subset cl(f^{-1}(\cup\mathscr{G}')\setminus f^{-1}(x))$，于是$\partial f^{-1}(x)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\partial f_\alpha^{-1}(x)$，从而$x\in D$，即$E\subset D$．若$X\setminus E$不是X的离散子集，由于X是Fréchet空间，存在$X\setminus E$中点组成的序列$\{x_n\}$收敛于某点$x\in E$，于是存在X的开子集列$\{V_n\}$使得每一$x_n\in V_n$且$x\notin cl(V_n)$．让$(\mathscr{G})_x=\langle G_n\rangle$，并且对于每一$n\in N$,

让 $A_n = V_n \setminus \bigcup_{m\leq n} G_m$，那么 $x_n \in cl(A_n)$，于是 $x \in cl(\bigcup_{n\in N} A_n)$，从而存在$\bigcup_{n\in N} A_n$中的序列 S 收敛于 x，因此存在 $i\in N$ 使得 G_i 含有序列 S 的无限项，这表明 $x \in cl((\bigcup_{n\in N} A_n) \cap G_i)$，因而对于某个 $j<i$ 有 $x \in cl(A_j)$，故 $x \in cl(V_j)$，矛盾. 这说明 $X \setminus E$ 是 X 的离散子集，所以$\{x\in X : \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$也是 X 的离散子集.

(5)$\Rightarrow$(1). 由定理 4.3.5 的(5.3), X 存在可度量的递增的闭覆盖$\langle D_n \rangle$使得$\langle D_n \rangle$是 X 的 K 覆盖，于是 X 关于$\langle D_n \rangle$具有弱拓扑，从而 X 由$\langle D_n \rangle$控制. ▮

问题 4.3.8 设 $f:Z\rightarrow X$ 是闭映射, Z 是度量空间. 刻画分别满足定理 4.3.5 的条件(a)或(b)的空间 X.

定理 4.3.9(林寿[1997b]) 设 Z 是度量空间，下述条件相互等价:

(1) Z 的任一闭映象由可度量空间族控制.

(2) 若 F 是 Z 的闭子集，那么∂F是局部紧的.

(3) Z 的非孤立点集是 Z 的局部紧子集.

(4) Z 是局部的正规度量空间.

证明. 以 Z'表示 Z 的非孤立点集.

(1)$\Rightarrow$(2). 设 F 是 Z 的闭子集，让 q 是从 Z 到 Z/F 上的自然商映射，则 q 是闭映射，于是 Z/F 由可度量空间族控制. 由推论 4.3.6 知∂F是 Z 的局部紧的子空间.

(2)$\Rightarrow$(3). 如果 Z'不是局部紧的，那么存在 $z\in Z'$ 及 z 在 Z'中递减的可数局部基$\langle V_n \rangle$使得每一 $cl(V_n)$不是 Z'的紧子集. 由归纳法可选取子集列$\{V_{n_i}\}$以及每一 $cl(V_{n_i})$的可数离散子集 D_i 使得 $cl(V_{n_i}) \cap (\bigcup_{j<i} D_j) = \varnothing$. 置 $D=\{z\} \cup (\bigcup_{i\in N} D_i)$，则 D 是 Z 的闭子集. 由于 D 不含有 Z 的孤立点且以 z 为唯一聚点，所以$\partial D=D$. 但是 D 不是 Z 的局部紧子集，这与条件(2)矛盾，故 Z'是局部紧的.

(3)$\Rightarrow$(4). 对于 $z\in Z$，若 z 是 Z 的孤立点，那么$\{z\}$是 z 在 Z 中的可正规度量的邻域. 若 z 不是 Z 的孤立点，由条件(3)知存在 z 在 Z 中的开邻域 V 使得 $cl(V\cap Z')$是紧子集. 置 $U=cl(V\cap Z')\cup(V\setminus Z')$，那么 U 是 z 在 Z 中的邻域，往证 U 是正规度量空间. 因为 $V\setminus Z'$中的点是 Z 的孤立点，所以 U 的非孤立点集是 $cl(V\cap Z')$的闭子集，于是 U 的非孤立点集是 U 的紧子集. 由定义 1.2.1 知 U 是正规度量空间. 故 Z 是局部的正规度量空间.

(4)$\Rightarrow$(1). 设 Z 是局部的正规度量空间, 由于 Z 是度量空间, 于是 Z 是仿紧空间, 从而 Z 有局部有限的闭覆盖{Z_α : $\alpha\in\Lambda$}使得每一Z_α是正规度量空间. 让 f:Z$\rightarrow$X 是闭映射. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 置 X_α=f(Z_α), 由定理 1.3.4, X_α是可度量空间, 从而{X_α : $\alpha\in\Lambda$}是 X 的遗传闭包保持的可度量的闭覆盖, 故 X 由可度量空间族控制. ∎

Jayanthan, Kannan[1988]证明了正规度量空间还可刻画为"任一商映象是可度量的空间", 所以下述问题是很自然的. 若空间 X 是局部的正规度量空间, 那么 X 的任一商映象是否由度量空间族控制? 这一问题的回答是否定的.

例 4.3.10 (1) 存在局部的正规度量空间 Z 使得 Z 的某一开映象不由度量空间族控制.

让ω_1是赋予序拓扑的可数序数空间. 对于$\alpha<\omega_1$, 让 Z_α=[0, α], 那么 Z_α是紧度量空间. 令 Z=$\oplus_{\alpha<\omega_1}Z_\alpha$, 则 Z 是局部紧的度量空间, 于是 Z 是局部的正规度量空间. 让 f:Z$\rightarrow\omega_1$是自然映射, 那么 f 是开映射. 因为ω_1不是仿紧空间, 所以ω_1不由度量空间族控制.

(2) 定理 4.3.5(4)中 f 满足的两条件(a)和(b)是相互独立的, 其中(a) 每一$\partial f^{-1}(x)$是 Z 的局部紧子集; (b) {x$\in$X : $\partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集}是 X 的离散子集.

(10.1) 自然商映射 f: $Q^2\rightarrow Q^2/(Q\times\{0\})$满足条件(b), 但它不满足条件(a).

(10.2) 设 Z=$\{(x, y)\in R^2 : 0\le x\le 1, 0\le y<x\}\cup\{(0, 0)\}$. 赋予 Z 通常的欧氏拓扑, 则 Z 是度量空间. 令 X=$\{(x, y)\in R^2 : 0<x<1, x\notin S_1, 0\le y<x\}\cup\{(x, 0) : x\in S_1\}$. 定义 f:Z$\rightarrow$X 使得

$$f((x, y))=\begin{cases}(x, 0), x\in S_1\\(x, y), x\in(0,1)\setminus S_1\end{cases}.$$

赋予 X 由 f 诱导的商拓扑, 那么 f 是闭映射. 易验证, 每一$\partial f^{-1}((x, y))=f^{-1}((x, y))$, 所以 f 满足(a). 然而, {x$\in$X : $\partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集}=$\{1/n : n\in N\}\times\{0\}$不是 X 的离散子集, 故 f 不满足条件(b).

易验证, 空间 X 具有点可数的可度量的 cs*网.

(3) 存在 gf 可数空间 X 是由紧度量空间族控制, 但是 X 不是 g 可度量空间.

如例 1.5.6 中的空间 X. X 由紧度量空间族{$I\cup S_x$: x$\in$I}控制.

(4) 引理 4.3.4(3)中的正则性是必不可少的.

如例 1.5.8 中的半圆盘拓扑空间 X. 置 $\mathcal{P}$={{p} : p∈L} ∪ {B(q, 1/n)∩ S : q 的两个坐标均是有理数, n∈N}, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的星可数 k 网, 于是由 $\mathcal{P}$ 确定的 X 的星可数分解为{S} ∪ {{p} : p∈L}. 由于 $cl_s(S)=X$, 从而不存在 L 的可数子集Σ 使得 $cl_s(S)\subset S\cup\{x : x\in\Sigma\}$. █

第五章　关于星可数覆盖

可分度量空间的商映象或度量空间的商 s 映象都有简洁的内在特征. 寻求作为介于这两者之间的局部可分度量空间的商 s 映象的内在特征是一个十分有趣的问题. 局部可分度量空间等价于具有局部可数基的正则空间, 也等价于具有星可数基的正则空间, 所以局部可数覆盖或星可数覆盖是研究局部可分度量空间及其映象的重要工具. 林寿[1995]详细地讨论了具有局部可数 k 网的空间和局部可分度量空间的 ss 映象. Ikeda 和 Tanaka[1993]较早研究了具有星可数 k 网的空间. 随后, 刘川与 Tanaka[1996a, 1996b, 1996c, 1998a, 1998b]广泛地讨论了具有星可数 k 网空间的各种性质, 提出了不少问题, 有力地促进了与星可数 k 网相关的广义度量空间的研究. 紧接着 Sakai[1997a, 1997b]继承了他们的一些工作, 获得了星可数覆盖及局部可分度量空间闭映象的若干优美结果, 如证明了具有星可数 k 网的正则的 k 空间等价于由 k 且 $\aleph_0$ 空间族控制的正则空间(定理 5.2.2). 本章旨在介绍这方面的结果, 同时利用点可数覆盖理论探讨乘积空间是 k 空间的充要条件.

5.1　cs 网与局部可分度量空间的映象

本节讨论局部可分度量空间的商 s 映象、序列覆盖的商 s 映象以及它们的分解定理, 乘积空间的 k 空间性质(刘川, Tanaka[1996b]; Shibakov[1995a]; Tanaka[1997]), CW 复形的映射性质(刘川, Tanaka[1996c])等与此有关. 1924 年 Alexandroff 就已把局部可分度量空间分解为可分度量空间的拓扑和(Engelking[1977]的 4.4.F), 1956 年 A. H. Stone 研究了局部可分度量空间的开 s 映象与商 s 映象的度量化问题(Engelking[1977]的4.5.17 和 4.5.18). 作为介于可分度量空间和度量空间之间的局部可分度量空间的商 s 映象我们仅获得一个较复杂的内在刻画, 寻求局部可分度量空间的简单的商 s 映象的内有刻画还是一个尚未解决的问题(刘川, Tanaka[1996b]; Tanaka, 夏省祥[1996]). 与此相关的是 Velichko[1988]提出的关于度量空间商 s 映象的一个一般性问题.

问题 5.1.1　寻求拓扑性质 Φ 使得空间 X 是具有性质 Φ 的度量空间的商 s 映象当且仅当 X 既是 Φ 空间又是度量空间的商 s 映象.

上述问题反映了寻求一类由映射所刻画空间的分解性质. 本节将围绕问题 5.1.1 介绍局部可分度量空间的映象, 给出了局部可分度量空间的伪序列覆盖 s 映象、序列覆盖 s 映象、商 s 映象和闭 s 映象的内在刻画, 阐述这些映射与确定的星可数覆盖的关系.

由引理 2.3.1, 度量空间的商映象也是局部可分度量空间的商映象. 由于存在非局部可分的度量空间, 下述引理说明度量空间的商 s 映象未必是局部可分度量空间的商 s 映象.

引理 5.1.2 若空间 X 是局部可分度量空间的商 s 映象, 则 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的.

证明. 设 X 是局部可分度量空间的商 s 映象, 则 X 具有由 cosmic 子空间组成的点可数的 cs* 网 $\mathcal{G}$. 不妨设 X 是第一可数的. 由引理 2.1.5, $\mathcal{G}$ 满足条件(A). 对于每一 $x\in X$, 存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{G}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})$. 由引理 1.4.10 和引理 1.4.7, $\cup\mathcal{F}$ 是 x 在 X 中的邻域, 而 $\cup\mathcal{F}$ 也是 X 的可分子空间. 所以, X 是局部可分的. ∎

定理 4.2.6 表明空间 X 是局部可分度量空间的闭映象等价于 X 是度量空间的闭映象且 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的空间. 关于问题 5.1.1, 我们有

猜想 5.1.3(林寿, 刘川, 戴牧民[1997]) 空间 X 是局部可分度量空间的商 s 映象当且仅当 X 是度量空间的商 s 映象且 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的.

本节的第一个结果是刻画局部可分度量空间的商 s 映象. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族, $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x 的序列. $\mathcal{P}$ 称为 $\{x_n\}$ 的 cs 网, 若 U 是 X 中含 x 的开子集, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $\{x_n\}$ 是终于 P 的且 $P\subset U$. $\mathcal{P}$ 称为 $\{x_n\}$ 的 cs*网, 若 U 是 X 中含 x 的开子集, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $\{x_n\}$ 的某子序列是终于 P 的且 $P\subset U$.

定理 5.1.4(周丽珍[1999]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的伪序列覆盖 s 映象.

(2) X 是局部可分度量空间的子序列覆盖 s 映象.

(3) X 具有点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 其中每一 X_α 具有可数网 $\mathcal{P}_\alpha$ 满足: 对于 X 中任一收敛序列 S 存在 $\beta\in\Lambda$ 使得 $\mathcal{P}_\beta$ 为 S 的某子序列的 cs 网.

(4) X 具有点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 其中每一 X_α 具有可数网 $\mathcal{P}_\alpha$ 满足: 对于 X 中任一收敛序列 S 存在 $\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$ 使得 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$ 是 S 的 cs*网.

证明. (1)$\Rightarrow$(2), (3)$\Rightarrow$(4)都是显然的.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 X 是局部可分度量空间 M 在子序列覆盖 s 映射 f 下的象, 由引理 4.3.4, $M=\oplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$, 其中每一 M_α 是可分的度量空间. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 让 $\mathcal{B}_\alpha$ 是 M_α 的可数基,

X_α=f(M_α), $\mathcal{P}_\alpha$=f($\mathcal{B}_\alpha$), 则{X_α : $\alpha\in\Lambda$}是 X 的点可数覆盖且每一$\mathcal{P}_\alpha$是X_α的可数网. 对于 X 的任一收敛序列 S, 存在 M 的收敛序列 T 使得 f(T)是 S 的子序列. 因为$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{B}_\alpha$是M 的基, 所以存在$\beta\in\Lambda$使得$\mathcal{P}_\beta$是 f(T)的 cs 网.

(4)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 具有点可数覆盖{X_α : $\alpha\in\Lambda$}, 其中每一X_α具有可数网$\mathcal{P}_\alpha$满足: 对于 X 中任一收敛序列 S 存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$是 S 的 cs*网. 因为$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha$是 X 的点可数 cs*网, 由引理 1.3.7, 不妨设对于 X 中的任一收敛序列 S, 存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$使得 S$\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}X_\alpha$且$\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$是 S 的 cs*网. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 设$X_\alpha\in\mathcal{P}_\alpha$={$P_\beta$: $\beta\in\Gamma_\alpha$}, Γ_α是可数的, 且不妨设对于$\alpha\neq\alpha'\in\Lambda$, $\Gamma_\alpha\cap\Gamma_{\alpha'}=\varnothing$. 令$\Gamma=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\Gamma_\alpha$, 赋予$\Gamma$离散拓扑, 置 M={$\beta=(\beta_i)\in\Gamma^\omega$: 存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$及$\alpha\in\Lambda'$使得 $P_{\beta_0}=X_\alpha$, $<P_{\beta_i}>\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$, 且$<P_{\beta_i}>$是 X 中某点 x($\beta$)的网}, 则 M 是度量空间. 作 f:M$\to$X 使得 f($\beta$)=x($\beta$), 由引理 1.3.8, 易知 f 为 s 映射. 结合下述的(4.1)和(4.2), 说明 X 是局部可分度量空间的伪序列覆盖 s 映象.

(4.1) M 是局部可分的空间.

设$\beta=(\beta_i)\in$M, 则存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$及$\alpha\in\Lambda'$使得 $P_{\beta_0}=X_\alpha$, $<P_{\beta_i}>\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$. 令 M_β={$\gamma=(\gamma_i)\in$M : $\gamma_0=\beta_0$, $<P_{\gamma_i}>\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}$}, 则 M_β为 M 中含β的开子集, 且 $M_\beta\subset(\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\Gamma_\alpha)^\omega$, 从而$M_\beta$是可分的, 因此 M 是局部可分的度量空间.

(4.2) f 是伪序列覆盖映射.

设 S 是 X 中的任一收敛序列, 则存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$使得 S$\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}X_\alpha$且$\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$是 S 的 cs*网. 由引理 1.3.8, 存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=S, 于是 f 是伪序列覆盖映射. ▌

推论 5.1.5(林寿, 刘川, 戴牧民[1997]) 对于序列空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的商 s 象.

(2) X 具有点可数覆盖{X_α : $\alpha\in\Lambda$}, 其中每一X_α具有可数网$\mathcal{P}_\alpha$满足: 对于 X 中任一收敛序列 S 存在$\beta\in\Lambda$使得$\mathcal{P}_\beta$为 S 的某子序列的 cs 网.

(3) X 具有点可数覆盖{X_α : $\alpha\in\Lambda$}, 其中每一X_α具有可数网$\mathcal{P}_\alpha$满足: 对于 X 中任一收

敛序列 S 存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$是 S 的 cs*网. ∎

下面讨论局部可分度量空间的序列覆盖的商 s 映象的刻画. 我们在 2.2.8 中已定义了序列可分性, 并且证明了在序列可分空间中具有确定点可数 cs*网的空间具有可数网. 易验证, 映射保持序列可分性, 每一可分的 Fréchet 空间是序列可分空间, 但是可分的序列空间未必是序列可分空间(例 1.5.4 和引理 2.2.9). 下面证明序列可分空间有与 cosmic 空间相类似的映射刻画.

定理 5.1.6(林寿, 燕鹏飞[2001a]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是序列可分空间.

(2) X 是第一可数的可分空间的映象.

(3) X 是可展的可分空间的映象.

证明. 显然, (3)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(1).

(1)$\Rightarrow$(3). 设(X, τ)是序列可分空间. 由于每一可数空间是可数离散空间的映象, 不妨设 X 是不可数空间. 让 D=$\langle d_n\rangle$是 X 的可数的序列稠子集. 对于每一 x$\in$X, 取定 $S_x=\langle d_{x,n}\rangle\subset D$ 使得序列 S_x 在 X 中收敛于 x. 如果 x$\in$D, 不妨设每一 $d_{x,n}$=x; 如果 $x\in X\setminus D$, 不妨设$\langle d_{x,n}\rangle$的各项是两两互不相同的. 集合 X 的新拓扑τ'定义如下: 对于每一 $x\in U\subset X$, U 是 x 在(X, τ')的邻域当且仅当对于某个 $m\in N$ 有$\{d_{x,n}: n\geq m\}\subset U$. 那么$\tau'$是 X 上的拓扑.

(6.1) τ'是可分, 局部紧且 T_2 的空间.

D 是τ'的可数稠子集, 并且对于每一$x\in X, m\in N$, $\{x\}\cup\{d_{x,n}: n\geq m\}$是 x 在(X, τ')中的紧邻域.

(6.2) τ'是可展空间.

不妨设$\cup\{S_x: x\in X\setminus D\}$=D. 对于每一 n$\in$N, 置

$F_n=\{d_i: i\leq n\}$, $\mathcal{U}_n=\{\{x\}\cup(S_x\setminus F_n): x\in X\setminus D\}\cup\{\{x\}: x\in F_n\}$.

则$\mathcal{U}_n$是 X 的开覆盖且对于每一 x$\in$X,

$$\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)=\begin{cases}\{x\}\cup(S_x\setminus F_n), & x\in X\setminus D\\ \{x\}, & x\in F_n\end{cases}.$$

于是$\langle\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)\rangle$是 x 在(X, τ')中的局部基. 因此$\{\mathcal{U}_n\}$是(X, τ')的展开, 故(X, τ')是可展空间.

因为$\tau\subset\tau'$，恒等函数$id_X:(X,\tau')\to(X,\tau)$是连续的，于是X是可分且可展空间的映象. ■

由引理1.3.8, cosmic空间是可分度量空间的映象，所以有

推论 5.1.7 cosmic空间是序列可分空间. ■

下面转入讨论局部可分度量空间的映象与Velichko的问题5.1.1.

引理 5.1.8 设$\mathcal{P}$是空间X的关于有限交封闭的点可数cs网. 如果$\mathcal{U}$是X的sn覆盖，置$\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P}$：对于某一$U\in\mathcal{U}$有$P\subset U\}$. 则$\mathcal{P}'$仍是X的cs网.

证明. 设$x\in W$且W是X的开子集. 如果$\{x_n\}$是X中收敛于x的序列，置

$\mathcal{P}_x=\{P\in\mathcal{P}$：序列$\{x_n\}$是终于P的且$P\subset W\}=\langle P_n\rangle$.

对于每一$n\in N$，令$Q_n=\bigcap_{i\le n}P_i$，那么$Q_n\in\mathcal{P}_x$. 让$U_x\in\mathcal{U}$是x在X中的序列邻域. 如果存在序列$\{q_n\}$使得每一$q_n\in Q_n\setminus U_x$，设G是X的开子集且$x\in G$，由于$\mathcal{P}$是X的cs网，那么对于某一$k\in N$有$P_k\subset G$，于是当$n\ge k$时有$q_n\in Q_n\subset P_k\subset G$，从而序列$\{q_n\}$收敛于x，这与$U_x$是x的序列邻域相矛盾. 因此对于某一$m\in N$有$Q_m\subset U_x$，于是$Q_m\in\mathcal{P}'$. 故$\mathcal{P}'$是X的cs网. ■

引理5.1.8中覆盖$\mathcal{P}$的点可数性是本质的. 让X是例1.5.7的Michael空间$N\cup\{p\}$. 设$\mathcal{P}$是X的基且$\mathcal{U}=\{\{x\}: x\in X\}$，则$\mathcal{U}$是X的so覆盖. 置$\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P}$：对于某一$U\in\mathcal{U}$有$P\subset U\}$，那么$\mathcal{P}'=\{\{x\}: x\in N\}$不是X的cs网.

定理 5.1.9(林寿，燕鹏飞[2001a]; Tanaka，夏省祥[1996]) 对于空间X，下述条件相互等价:

(1) X是局部可分度量空间的序列覆盖s映象.

(2) X有由cosmic子空间组成的点可数cs网.

(3) X有由$\aleph_0$子空间组成的点可数cs网.

(4) X既有点可数cs网又有由$\aleph_0$子空间组成的so覆盖.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 让$f:M\to X$是序列覆盖的s映射，其中M是局部可分的度量空间. 设$\mathcal{B}$是M的由可分子集组成的σ局部有限基. 置$\mathcal{P}=f(\mathcal{B})$. 那么$\mathcal{P}$是X的由cosmic子空间组成的点可数cs网.

(2)$\Rightarrow$(4). 设$\mathcal{P}$是X的由cosmic子空间组成的点可数cs网. 对于每一$P\in\mathcal{P}$，由推论5.1.7，让

D(P)是 P 的可数的序列稠子集. 对于每一 $x\in X$, 置

$\mathcal{P}(x, 1)=\{P\in\mathcal{P}: x\in P\}$, $D(x, 1)=\cup\{D(P): P\in\mathcal{P}(x, 1)\}$.

对于每一 $n\geq 2$, 归纳地定义

$\mathcal{P}(x, n)=\{P\in\mathcal{P}: P\cap D(x, n-1)\neq\varnothing\}$, $D(x, n)=\cup\{D(P): P\in\mathcal{P}(x, n)\}$.

让 $\mathcal{P}(x)=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}(x, n)$, $U(x)=\cup\mathcal{P}(x)$. 为完成(4)的证明, 只须说明 U(x)是 X 的序列开子集且可数子族 $\mathcal{P}(x)$是 U(x)的 cs 网. 如果 X 中的序列$\{y_n\}$收敛于 $y\in U(x)\cap W$, 其中 W 是 X 的开子集, 则对于某一 $m\in N$ 和 $P\in\mathcal{P}(x, m)$有 $y\in P$, 于是存在 D(P)中的序列$\{z_n\}$在 X 中收敛于 y, 从而对于某一 $k\in N$ 和 $F\in\mathcal{P}$ 有$\{y\}\cup\{y_n, z_n: n\geq k\}\subset F\subset W$, 因此 $F\in\mathcal{P}(x, m+1)\subset\mathcal{P}(x)$且$\{y\}\cup\{y_n: n\geq k\}\subset F\subset U(x)\cap W$. 这表明 U(x)是 X 的序列开子集且 $\mathcal{P}(x)$是 U(x)的 cs 网.

由引理 5.1.8 可知(4)$\Rightarrow$(3), 下面证明(3)$\Rightarrow$(1).

设 X 有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 cs 网 $\mathcal{P}$. 让 $\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 由定理 2.4.3, 存在可分度量空间 M_α 和序列覆盖映射 $f_\alpha: M_\alpha\to P_\alpha$. 置 $M=\oplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$, $Z=\oplus_{\alpha\in\Lambda}P_\alpha$ 且 $f=\oplus_{\alpha\in\Lambda}f_\alpha: M\to Z$. 那么 M 是局部可分的度量空间且 f 是序列覆盖映射. 定义 $h: Z\to X$ 是自然映射, 且让 $g=h\circ f: M\to X$. 那么 g 是序列覆盖的 s 映射. ∎

定理 5.1.9 中的(1)$\Leftrightarrow$(2)在 Tanaka, 夏省祥[1996]中被证明, (1)$\Leftrightarrow$(3)在李进金[2000a]中被证明. (4)的作用之一是由它可获得局部可分度量空间的序列覆盖的商 s 映象的下述分解性质. 这是问题 5.1.1 的部分解.

推论 5.1.10(林寿, 燕鹏飞[2001a]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖的商 s 映象.

(2) X 既是局部的$\aleph_0$空间又是度量空间的序列覆盖的商 s 映象.

(3) X 是具有点可数 cs 网的局部$\aleph_0$的序列空间. ∎

类似地, 我们也可获得局部可分度量空间的 1 序列覆盖s 映象和 2 序列覆盖 s 映象的刻画, 相关的结果可见李进金, 蔡伟元[2000].

现在, 我们进一步介绍在定理 5.1.9 中"so 覆盖"是点可数的情形.

定理 5.1.11(林寿, 燕鹏飞[2001a]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 有星可数的 cs*网(cs 网).

(2) X 有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 so 覆盖.

(3) X 有由$\aleph_0$子空间组成的互不相交 so 覆盖.

证明. (3)$\Rightarrow$(2)是显然, 只须证(2)$\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(3).

(2)$\Rightarrow$(1). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的由$\aleph_0$子空间组成的点可数so 覆盖. 置$\mathcal{P}$={P_α: $\alpha\in\Lambda$}. 对于每一$\beta\in\Lambda$, 由推论 5.1.7, 以D_β表示P_β的可数的序列稠子集. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 因为P_α是序列开的, 所以$D_\beta\cap P_\alpha\neq\varnothing$当且仅当$P_\beta\cap P_\alpha\neq\varnothing$. 于是{$P_\alpha\in\mathcal{P}$: $P_\beta\cap P_\alpha\neq\varnothing$}是可数的. 即$\mathcal{P}$是星可数的. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 设$\mathcal{P}_\alpha$是$P_\alpha$的可数 cs 网, 易验证, $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha$是 X 的星可数 cs 网.

(1)$\Rightarrow$(3). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的星可数 cs*网. 由引理 4.3.4, 设{$\mathcal{P}_\alpha$:$\alpha\in\Lambda$}和{X_α : $\alpha\in\Lambda$}分别是$\mathcal{P}$和X的星可数分解, 于是X是$\aleph_0$子空间族{X_α : $\alpha\in\Lambda$}的互不相交的并, 且每一$\mathcal{P}_\alpha$是X_α的可数 cs*网. 我们还要证明每一X_α在 X 中是序列开的. 如果 X 中的序列{x_n}收敛于点$x\in X_\alpha$, 令$(\mathcal{P})_x$=<P_i>, 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网, 由引理 1.3.7, 存在 m, k$\in$N 使得{x_n : $n\geq m$}$\subset\bigcup_{i\leq k}P_i$, 这时$\bigcup_{i\leq k}P_i\subset X_\alpha$, 于是序列{$x_n$}是终于 X_α的, 故 X_α是序列开的. 因此, {X_α: $\alpha\in\Lambda$}是 X 的由$\aleph_0$子空间组成的互不相交的 so 覆盖. ▌

推论 5.1.12 对于序列空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 有星可数的 cs*网(cs 网).

(2) X 有由$\aleph_0$子空间组成的点可数开覆盖.

(3) X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和. ▌

推论 5.1.13 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有局部可数的 cs*网.

(2) X 具有局部可数且星可数的 cs 网.

(3) X 具有局部可数的 cfp 网.

证明. (3)$\Rightarrow$(1)是显然的, 所以只须证明(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3).

(1)$\Rightarrow$(2). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的局部可数cs*网. 对于$x\in$X, 存在 x 在 X 中的开邻域V_x使得V_x

与 $\mathcal{P}$ 中至多可数个元相交. 令 $\mathcal{F}$={P∈$\mathcal{P}$：存在 $V_x \supset P$}. 则 $\mathcal{F}$ 是星可数的. 由引理 4.3.4, 设 $\{\mathcal{F}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$和$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$分别是 $\mathcal{F}$ 和 X 的星可数分解, 于是 X 是$\aleph_0$子空间族$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$的互不相交并, 且每一 $\mathcal{F}_\alpha$ 是 X_α 的可数 cs*网. 让 $\mathcal{H}_\alpha$ 是 $\mathcal{F}_\alpha$ 的有限并的全体, $\mathcal{H}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{H}_\alpha$. 由于每一$V_x$至多与可数个$X_\alpha$相交, $\mathcal{H}$是局部可数且星可数的, 往证它是X的cs网. 设 U 是 X 的开子集, 并且 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x∈U, 由引理 1.3.7, 存在 m∈N 和 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$\{x\}\cup\{x_n: n\geq m\}\subset\cup\mathcal{P}'\subset U\cap V_x$且 $x\in\cap\mathcal{P}'$, 这时有唯一的$\alpha\in\Lambda$使得 $x\in X_\alpha$, 则$\cup\mathcal{P}'\in\mathcal{H}_\alpha$, 从而$\mathcal{H}$是X的cs网.

(2)⇒(3). 设X具有局部可数cs网, 则X的紧子集是第一可数的, 由引理2.5.5知X的局部可数cs网就是X的cfp网. ▌

引理 5.1.14(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]) 设X是可分, 正则的Fréchet空间. 若$\mathcal{P}$是空间X的点可数wcs*网, D是X的可数稠子集, 则$\mathcal{F}$={cl(P) : P∈$\mathcal{P}$, P∩D≠∅}是X的k网.

证明. 对于K⊂U, 其中K, U分别是X的紧子集和开子集. 令$\mathcal{F}$(U)={F∈$\mathcal{F}$: F⊂U}. 对于每一 x∈U, 存在 X 的开子集 V 使得 x∈V⊂cl(V)⊂U. 因为 x∈cl(D), 存在 V∩D 中的序列$\{x_n\}$收敛于x, 从而存在P∈$\mathcal{P}$使得P含有序列$\{x_n\}$的无限项且P⊂V, 因此cl(P)∈$\mathcal{F}$且x∈cl(P)⊂U. 这说明 $\mathcal{F}$(U)是 U 的可数覆盖. 记 $\mathcal{F}(U)=\langle F_n\rangle$. 对于每一 z∈K, 则存在 m∈N 使得 $z\in \mathrm{int}_K(\bigcup_{n\leq m}F_n)$. 若不然, 设$z\in F_1$, 由引理2.1.6和推论2.1.4, K是第一可数的, 存在收敛于z的序列$\{z_n\}$使得每一$z_n\in K\setminus\bigcup_{i\leq n}F_i$, 又由于$\bigcup_{i\leq n}F_i$是闭的, 存在$D\setminus\bigcup_{i\leq n}F_i$中的序列$\{y_{nk}\}$收敛于$z_n$, 从而$z\in \mathrm{cl}\{y_{nk}: n, k\in N\}$, 于是存在序列$\{y_{n_jk_j}\}$收敛于z. 因为对于所有的n, k∈N, 有 $z_n\neq z$, $y_{nk}\neq z$, 所以当 $j\to\infty$ 时有 $n_j\to\infty$. 这时存在 P∈P 使得 cl(P)⊂U 且 P 含有序列$\{y_{n_jk_j}\}$的无限项, 于是cl(P)∈$\mathcal{F}$(U), 所以存在m∈N有$\mathrm{cl}(P)=F_m$, 但是当$n_j>m$时有$y_{n_jk_j}\notin F_m$, 矛盾. 故存在 m∈N 使得 $z\in \mathrm{int}_K(\bigcup_{n\leq m}F_n)$, 因此存在 $\mathcal{F}$(U)的有限子族覆盖 K, 即 $\mathcal{F}$ 是 X 的 k 网. ▌

推论 5.1.15 具有点可数wcs*网的局部可分的正则的Fréchet空间是$\aleph_0$空间族的拓扑和.

证明. 设 X 是具有点可数 wcs*网的局部可分的正则的 Fréchet 空间, 由定理 2.1.15, X 是亚 Lindelöf 空间, 于是 X 具有由可分子集组成的点可数开覆盖, 这覆盖是星可数覆盖, 所以由引理 4.3.4, X 是可分空间族的拓扑和, 再由引理 5.1.14, X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和. ▮

定理 5.1.16(林寿[1995], Velichko[1987]) 对于正则的 Fréchet 空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有局部可数 cs 网.

(2) X 具有局部可数 k 网.

(3) X 具有星可数 cs 网.

(4) X 是局部可分度量空间的闭 s 映象.

(5) X 是局部可分度量空间的商 s 映象.

(6) X 是具有点可数 cs*网的局部可分空间.

(7) X 具有点可数的可分 cs*网.

证明. 由引理2.1.6, 推论 5.1.12, 引理 4.2.1, 引理2.1.10, 引理 1.4.2 和推论5.1.15 知(1)$\Rightarrow$(2), (3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(5)$\Rightarrow$(6)$\Rightarrow$(7), (6)$\Rightarrow$(1).

(2)$\Rightarrow$(3). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的局部可数 k 网. 由正则性, 不妨设$\mathcal{P}$是 X 的闭 k 网, 于是$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网. 由推论 5.1.13, X 具有星可数 cs 网.

(7)$\Rightarrow$(5). 设 X 具有点可数的可分 cs*网. 由推论 5.1.15, X 具有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 cs*网. 再由推论 5.1.5, X 是局部可分度量空间的商 s 映象. ▮

定理 5.1.16 说明了在正则的 Fréchet 空间中局部可分性是问题5.1.1 的一个解. 具有局部可数 k 网空间的进一步的等价条件可见推论 5.2.7.

图 5.1.17 本节中介绍的一些集族间的关系如下图.

$\aleph_0$空间族的拓扑和	$\Rightarrow$	局部可数 cs 网	$\Rightarrow$	星可数 cs 网	$\Leftrightarrow$	星可数 cs*网	$\Rightarrow$	由$\aleph_0$子空间组成的点可数 cs 网
$\Updownarrow$		$\Downarrow$				$\Downarrow$		$\Downarrow$
由$\aleph_0$子空间组成的点可数的开覆盖	$\Rightarrow$	局部可数 k 网	$\Rightarrow$	星可数 k 网	$\Rightarrow$	星可数 wcs*网	$\Rightarrow$	点可数 wcs*网
		$\Downarrow$		$\searrow$			$\nearrow$	
		局部$\aleph_0$空间				σ紧有限 k 网		

例 5.1.18 图 5.1.17 所述空间之间的不蕴含关系由下述例子说明.

(1) 具有局部可数 cs 网$\not\Rightarrow$ $\aleph_0$空间族的拓扑和; 如例 1.5.5.

(2) 具有星可数 cs 网$\not\Rightarrow$具有σ紧有限 k 网, 或局部$\aleph_0$空间; 例如极大紧化βN.

(3) 局部可分度量空间的商 s 映象$\not\Rightarrow$局部可分空间或具有点可数 cs 网; 如例 1.5.6 中的空间 X.

(4) 具有星可数 k 网$\not\Rightarrow$局部可分空间或具有点可数 cs 网; 如例 1.5.2 中的扇空间 S_{ω_1}.

(5) 具有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 cs 网的序列空间$\not\Rightarrow$具有由 cosmic 子空间组成的点可数 so 覆盖或具有星可数 wcs*网; 如例 1.5.4.

(6) 局部$\aleph_0$空间$\not\Rightarrow$具有点可数 wcs*网; 例如赋予序拓扑的空间ω_1.

(7) 具有局部可数 k 网$\not\Rightarrow$具有点可数 cs*网; 如例 1.5.8.

(8) 具有σ紧有限 k 网$\not\Rightarrow$具有星可数 wcs*网; 如例 1.5.6 中的空间X_M, 其中 M 是非可分的度量空间. 因为X_M由度量空间族控制, 由引理 4.2.5, X_M具有σ紧有限 k 网. 若X_M具有星可数 wcs*网, 由引理 4.3.4, X_M具有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 wcs*网. 而 M 是X_M的第一可数的子空间, 由引理 5.1.2 的证明, M 是局部可分的, 矛盾. 故X_M不具有星可数 wcs*网. ■

对照定理 3.3.8 和定理 4.2.6, 我们有下述问题.

问题 5.1.19 局部可分度量空间的序列覆盖的紧映象是否等价于具有由$\aleph_0$子空间组成的点正则 cs 网的空间?

问题 5.1.20 设正则空间 X 是具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间. 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的, 那么 X 是否是局部可分空间?

5.2 k 网与 Sakai 的定理

我们在§4.2 已初步讨论了局部可分度量空间的闭映象, 定理 4.2.6 表明正则空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有σ遗传闭包保持可分 k 网的 Fréchet 空间. 由引理 4.1.3, 这时 X 是具有σ紧有限可分 k 网的 Fréchet 空间, 其逆命题是否成立?

问题 5.2.1(Ikeda, Tanaka[1993]) 具有点可数可分 k 网的正则的 Fréchet 空间是否是局部可分度量空间的闭映象?

本节介绍 Sakai 关于星可数 k 网的 k 空间的主要工作, 内容包括这类空间的结构(定理 5.2.2), 与具有局部可数 k 网空间的精确关系(定理 5.2.5), 与局部可分度量空间闭映象的关系(定理 5.2.8),

同时肯定地回答了问题 5.2.1(定理 5.2.8).

定理 5.2.2(Sakai[1997a]) 正则空间 X 是具有星可数 k 网的 k 空间当且仅当 X 由 k 且 $\aleph_0$ 空间族控制.

证明. 设空间 X 由 k 且 $\aleph_0$ 空间族 $\mathcal{D}$ 控制, 于是 X 关于 $\mathcal{D}$ 具有弱拓扑, 从而 X 是 k 空间. 记 $\mathcal{D}$={X_α : $\alpha<\lambda$}且每一 X_α 是 $\aleph_0$ 空间. 对于每一 $\alpha<\lambda$, 让 $Y_0=X_0$, $Y_\alpha=X_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}X_\beta$ 且 $\mathcal{P}_\alpha$ 是 X_α 的可数 k 网. 置 $\mathcal{P}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{P}_{\alpha}|_{Y_\alpha}$. 那么 $\mathcal{P}$ 是 X 的星可数覆盖. 往证 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网. 对于 K⊂U, 其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集, 由引理 4.2.5, K 仅与有限个 Y_{α_n} (n≤m)相交, 对于每一 n≤m, 存在 $\mathcal{P}'_{\alpha_n}\in\mathcal{P}_{\alpha_n}^{<\omega}$ 使得 $K\cap X_{\alpha_n}\subset\cup\mathcal{P}'_{\alpha_n}\subset U$, 让 $\mathcal{P}'=\bigcup_{n\le m}\mathcal{P}'_{\alpha_n}|_{Y_{\alpha_n}}$, 那么 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 且 $K\subset\cup\mathcal{P}'\subset U$. 故 X 具有星可数 k 网.

反之, 设正则空间 X 是具有星可数 k 网 $\mathcal{P}$ 的 k 空间. 由引理 4.3.4, 让{X_α : $\alpha\in\Lambda$}是由 $\mathcal{P}$ 确定的 X 的星可数分解. 为了证明的简明起见, 对于 Λ 的子集 Γ, 记[Γ]=$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$ 和 n∈N, 归纳地定义 Λ 的可数子集 $\Lambda_{\alpha n}$ 如下: $\Lambda_{\alpha 1}=\{\alpha\}$. 如果 $\Lambda_{\alpha n}$ 已被定义, 置 $\Lambda_{\alpha n+1}=\{\beta\in\Lambda$: 存在[$\Lambda_{\alpha n}$]中的序列收敛于 X_β 中的点}. 由引理 4.3.4, $\Lambda_{\alpha n}$ 是可数的. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 置 $\Lambda_\alpha=\bigcup_{n\in N}\Lambda_{\alpha n}$, 那么 Λ_α 是 Λ 的可数子集. 再置 $\mathcal{D}$={[Λ_α]: $\alpha\in\Lambda$}. 往证 X 由 k 且 $\aleph_0$ 空间族 $\mathcal{D}$ 控制.

显然, $\mathcal{D}$ 的每一元[Λ_α]是 X 的 k 且 $\aleph_0$ 子空间.

对于每一 $\Gamma\subset$M. 让 Y=$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}[\Lambda_\alpha]$. 若 Y 不是 X 的闭子集, 因为 X 是序列空间, 存在 Y 中的序列{y_n}收敛于某点 y∈X╲Y, 由引理 4.3.4, 集{$\alpha\in\Lambda$: 存在 n∈N 使得 $y_n\in X_\alpha$}是有限的, 于是, 不妨设存在 $\gamma\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\Lambda_\alpha$ 使得序列<y_n>⊂X_γ. 这时存在 $\alpha\in\Gamma$ 和 m∈N 使得 $\gamma\in\Lambda_{\alpha m}$ 且 <y_n>⊂[$\Lambda_{\alpha m}$], 于是 y∈[$\Lambda_{\alpha m+1}$]⊂[Λ_α], 矛盾. 故 Y 是 X 的闭子集. 这说明 $\mathcal{D}$ 是 X 的闭包保持闭覆盖.

设 Z⊂Y 且对于每一 $\alpha\in\Gamma$, Z∩[Λ_α]是 Y 的闭子集. 若 Z 不是 Y 的闭子集, 存在 Z 中的序

列$\{z_n\}$收敛于 $z\in Y\setminus Z$. 与上述类似的理由, 存在$\alpha\in\Gamma$使得$[z_n]\subset[\Lambda_\alpha]$, 从而 $z\in Z$, 矛盾. 所以 Z 是 Y 的闭子集, 因而 Y 关于$\{[\Lambda_\alpha]:\ \alpha\in\Gamma\}$具有弱拓扑. ▮

因为由仿紧空间族控制的空间是仿紧空间(Morita[1954]), 由正则σ空间族控制的空间是σ空间(林寿[1991]), 所以有下述

推论 5.2.3 具有星可数 k 网的正则的 k 空间是仿紧σ空间. ▮

推论 5.2.4 具有星可数 k 网的可分, 正则的 k 空间是$\aleph_0$空间.

证明. 设 X 是具有星可数 k 网的可分, 正则的 k 空间. 由推论 5.2.3, X 是 Lindelöf 空间, 于是 X 的离散子集族是可数族. 再由引理 4.3.2, X 的星可数分解族是可数族, 于是 X 具有可数 k 网. ▮

空间 X 的特征$\chi(X)$是一基数, 定义为 $\sup\{\chi(p, X) : p\in X\}+\omega$, 其中 $\chi(p, X)=\min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$是 p 在 X 的局部基}. 由此, 空间 X 在点 x 具有可数局部基可记为$\chi(x, X)=\omega$, X 是第一可数空间可记为$\chi(X)=\omega$.

定理 5.2.5(刘川, Tanaka[1998b]; Sakai[1997a]) 设 X 是具有星可数 k 网的正则的 k 空间, 则下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分空间.

(2) X 具有点可数的 cs 网.

(3) X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和.

若更设(CH), 它们也等价于

(4) $\chi(X)\le\omega_1$.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的星可数 k 网. 让$\{X_\alpha\ :\ \alpha\in\Lambda\}$是由$\mathcal{P}$确定的 X 的星可数分解, $\{[\Lambda_\alpha]:\ \alpha\in\Lambda\}$是定理 5.2.2 证明中构造的空间 X 的由 k 且$\aleph_0$子空间组成的控制族.

(3)$\Rightarrow$(1)和(2)是显然的. (1)$\Rightarrow$(3). 设 X 是局部可分空间, 由推论 5.2.4, X 是局部$\aleph_0$空间, 再由推论 5.2.3 和推论 5.1.12, X 具有由$\aleph_0$子空间组成的点可数开覆盖, 所以 X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和.

(2)$\Rightarrow$(3). 设空间 X 具有点可数 cs 网$\mathcal{H}$.

(5.1) 若$\{Y_\beta\ :\ \beta<\omega_1\}$是$\{X_\alpha\ :\ \alpha\in\Lambda\}$的子族. 对于每一$\beta<\omega_1$, 让$\{x_{\beta n}\}$是 Y_β 中收

敛于点 $x_\beta \in X\setminus Y_\beta$ 的序列, 那么对于每一 $\mu\in\Lambda$, 集 $X_\mu\cap\{x_\beta : \beta<\omega_1\}$ 是可数的.

事实上, 若存在 $\mu\in\Lambda$ 使得 $X_\mu\cap\{x_\beta : \beta<\omega_1\}$ 是不可数的, 因为 X_μ 是 $\aleph_0$ 空间, 由推论 5.1.7, X_μ 是序列可分空间, 让 D_μ 是 X_μ 的可数的序列稠子集, 不妨设 $\{x_\beta : \beta<\omega_1\}\subset X_\mu\setminus D_\mu$. 对于每一 $\beta<\omega_1$, 让 $\{y_{\beta n}\}$ 是 D_μ 中收敛于点 x_β 的序列. 定义 X 中的序列 $\{t_{\beta n}\}$ 使得每一 $t_{\beta 2k-1}=x_{\beta k}, t_{\beta 2k}=y_{\beta k}$, 令 $T_\beta=[t_{\beta n}]$, 则序列 $\{t_{\beta n}\}$ 收敛于 x_β. 因为 $\mathcal{H}$ 是 X 的 cs 网, 存在 $H_0\in\mathcal{H}$ 使得 $T_0\setminus H_0$ 是有限的. 固定点 $z_0\in H_0\cap\langle x_{0n}\rangle$. 设 $\gamma<\omega_1$ 且对于 $\beta<\gamma$, 已定义 $H_\beta\in\mathcal{H}$, $z_\beta\in H_\beta\cap\langle x_{\beta n}\rangle$ 使得 $T_\beta\setminus H_\beta$ 是有限的. 由引理 4.3.4, $\{z_\beta : \beta<\gamma\}$ 是 X 的闭子集. 于是我们可以选取 $H_\gamma\in\mathcal{H}$ 使得 $H_\gamma\cap\{z_\beta : \beta<\gamma\}=\varnothing$ 且 $T_\gamma\setminus H_\gamma$ 是有限的, 固定点 $z_\gamma\in H_\gamma\cap\langle x_{\gamma n}\rangle$. 我们可以归纳地得到 $\mathcal{H}$ 的子集族 $\{H_\beta : \beta<\omega_1\}$ 使得当 $\beta_1\neq\beta_2$ 时有 $H_{\beta_1}\neq H_{\beta_2}$. 因为每一 H_β 与可数集 D_μ 相交, 所以 $\{H_\beta : \beta<\omega_1\}$ 不是点可数的, 这与 $\mathcal{H}$ 的点可数性相矛盾.

(5.2) Λ 的覆盖 $\{\Lambda_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$ 是点可数的.

子标族 $\{\Lambda_{\alpha 1} : \alpha\in\Lambda\}$ 显然是点可数的. 若 $\{\Lambda_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$ 不是点可数的, 则存在 $n\in N$ 使得 $\{\Lambda_{\alpha n} : \alpha\in\Lambda\}$ 是点可数的且存在 $\beta\in\bigcap_{\alpha<\omega_1}\Lambda_{\beta_\alpha n+1}$. 因为 $\{\Lambda_{\alpha n} : \alpha\in\Lambda\}$ 是点可数的, 我们可以设 $\beta\in\bigcap_{\alpha<\omega_1}(\Lambda_{\beta_\alpha n+1}\setminus\Lambda_{\beta_\alpha n})$, 于是对于 $\alpha<\omega_1$ 存在 $\gamma_\alpha\in\Lambda_{\beta_\alpha n}$ 且 X_{γ_α} 中的序列 $\{x_{\alpha n}\}$ 收敛于某点 $x_\alpha\in X_\beta$. 由 $\{\Lambda_{\beta_\alpha n} : \alpha\in\Lambda\}$ 的点可数性, 集 $\{\gamma_\alpha : \alpha<\omega_1\}$ 是不可数的. 此外, 由(5.1), $\{x_\alpha : \alpha<\omega_1\}$ 是可数的. 因此, 由引理 4.3.4, 不难看出 X 含有子空间同胚于 S_{ω_1}. 然而, S_{ω_1} 不具有点可数 cs 网, 矛盾. 因此, $\{\Lambda_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$ 是点可数的.

(5.3) X 的覆盖 $\{[\Lambda_\alpha] : \alpha\in\Lambda\}$ 是星可数的.

注意到条件 $[\Lambda_\alpha]\cap[\Lambda_\beta]\neq\varnothing$ 蕴含 $\Lambda_\alpha\cap\Lambda_\beta\neq\varnothing$. 如果对于 $\beta<\omega_1$ 有 $[\Lambda_\alpha]\cap[\Lambda_{\alpha_\beta}]\neq\varnothing$, 那么 $\Lambda_\alpha\cap\Lambda_{\alpha_\beta}\neq\varnothing$. 因为 Λ_α 是可数的, 所以 $\{\Lambda_{\alpha_\beta} : \beta<\omega_1\}$ 不是点可数的, 矛盾.

由引理 4.3.4 和(5.3), 存在互不相交族$\{\Gamma_\gamma : \gamma<\kappa\}$使得每一$\Gamma_\gamma$是可数的且对于不同的$\gamma$与$\delta$有$(\bigcup_{\mu\in\Gamma_\gamma}[\Lambda_\mu])\cap(\bigcup_{\upsilon\in\Gamma_\delta}[\Lambda_\upsilon])=\varnothing$. 因为每一$\bigcup_{\mu\in\Gamma_\gamma}[\Lambda_\mu]$是$\aleph_0$空间且是 X 的开子集, 所以 X 是$\aleph_0$空间族$\{\bigcup_{\mu\in\Gamma_\gamma}[\Lambda_\mu] : \gamma<\kappa\}$的拓扑和.

(4)$\Rightarrow$(1). 对于每一 x$\in$X, 让$\{V_\beta : \beta<\omega_1\}$是 x 在 X 中的局部基, 则存在$\beta<\omega_1$使得$V_\beta$仅与可数多个$X_\alpha$相交. 否则, 由归纳法, 存在$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$的子族$\{Y_\beta : \beta<\omega_1\}$和 X 的子集 D=$\{x_\beta : \beta<\omega_1\}$使得每一 $x_\beta\in V_\beta\cap Y_\beta\setminus\{x\}$, 且这些 Y_β是两两互不相同的. 由引理 4.3.4, D 是 X 的离散子集, 矛盾. 故, 存在$\beta<\omega_1$使得 V_β仅与至多可数个 X_α相交. 因为每一X_α是遗传可分的, 所以 V_β是可分的, 从而 X 是局部可分的.

假设(CH), 我们证明(3)$\Rightarrow$(4). 由于 X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和, 为证明$\chi(X)\le\omega_1$, 只须证明对于每一可分的正则空间 Y, 有$\chi(Y)\le\omega_1$. 让 D 是 Y 的可数稠子集. 对于每一 y$\in$U$\in\tau(Y)$, 存在 Y 的开子集 V 使得 $y\in V\subset cl(V)\subset U$, 让 E=V$\cap$D, 则 $y\in int(cl(V))=int(cl(E))\subset U$. 所以$\{int(cl(E)) : E\subset D\}$是 Y 的基, 从而$\chi(Y)\le w(Y)\le 2^{d(X)}=\omega_1$. ∎

若没有假设(CH), 则定理 5.2.5 中的(3)$\not\Rightarrow$(4). 事实上, 序列扇 S_ω是 k 且$\aleph_0$空间, 而在集论假设(MA+¬ CH)下, $\chi(S_\omega)=2^\omega>\omega_1$(刘川, Tanaka[1998b]).

引理 5.2.6(刘川, Tanaka[1996c]) 设 X 是正则的 Fréchet 空间. 若 X 具有点可数的可分 k 网, 令 Z=$\{x\in X : x$ 在 X 中有可分的邻域$\}$. 那么

(1) Z 是$\aleph_0$空间族的拓扑和.

(2) X$\setminus$Z 是 X 的离散子空间.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数的可分 k 网, 由推论 5.1.15, $\mathcal{P}$的每一元是遗传可分的. 显然, Z 是 X 的局部可分的开子集, 由推论 5.1.15, Z 是$\aleph_0$空间族的拓扑和. 令 Y=X$\setminus$Z, 则 Y 是 X 的闭子集, 往证 Y 是 X 的离散子空间. 对于每一 x$\in$X, 称 X 在 x 有闭 S_{ω_1}, 若 X 有闭子空间 S 同胚于 S_{ω_1} 且 S 的非孤立点是 x.

(6.1) 对于每一 x$\in$Y, X 在 x 有闭 S_{ω_1}.

因为 $x\in Y$, x 不是 X 的孤立点, 存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_{0n}\}$使得所有的 $x_{0n}\neq x$. 让

$\mathcal{P}_0=\{P\in\mathcal{P}: P\cap[x_{0n}]\neq\varnothing\}$.

则 $\mathcal{P}_0$是可数的. 由于 x 在 X 中没有可分的邻域, 所以 $x\notin \mathrm{int}(\cup\mathcal{P}_0)$, 于是 $x\in \mathrm{cl}(X\setminus(\cup\mathcal{P}_0))$. 因为 X 是 Fréchet 空间, 存在 $X\setminus(\cup\mathcal{P}_0)$中的序列$\{x_{1n}\}$收敛于 x. 让

$\mathcal{P}_1=\{P\in\mathcal{P}: P\cap[x_{1n}]\neq\varnothing\}$.

则 $\mathcal{P}_1$是可数的. 因为 $x\in \mathrm{cl}(X\setminus(\cup(\mathcal{P}_0\cup\mathcal{P}_1)))$, 于是存在 $X\setminus(\cup(\mathcal{P}_0\cup\mathcal{P}_1))$中的序列$\{x_{2n}\}$收敛于 x. 按这种方式, 我们可以得到互不相交的序列族$\{\{x_{\alpha n}\}: \alpha<\omega_1\}$使得

(6.1.1) 每一序列$\{x_{\alpha n}\}$收敛于 x 且所有的 $x_{\alpha n}\neq x$.

(6.1.2) $\mathcal{P}$的每一元至多与一个序列$\{x_{\alpha n}\}$相交.

让 $S=\{x\}\cup\{x_{\alpha n}: n\in N, \alpha<\omega_1\}$. 由(6.1.2)及$\mathcal{P}$是 X 的 k 网, X 的任何紧子集交至多有限个序列$\{x_{\alpha n}\}$, 所以 S 是 X 的闭子集. 对于序列$\{x_{\alpha n}\}$的任何有限子集 F_α, $\bigcup_{\alpha<\omega_1}F_\alpha$是 S 的闭子集, 于是 S 同胚于 S_{ω_1}. 从而 X 在 x 有闭 S_{ω_1}.

(6.2) Y 在 X 中是离散的.

因为 X 是 Fréchet 空间, 只须证明 Y 中的任一收敛序列是有限的. 设存在 Y 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 其中 x_n, x 是互不相同的. 由(6.1), 对于每一 $n\in N$, X 在 x_n 有闭 S_{ω_1}. 让 X 的闭子空间 $S^{(n)}=\{x_n\}\cup\{x_{\alpha i}^{(n)}: i\in N, \alpha<\omega_1\}$同胚于 S_{ω_1}. 选取 $S^{(1)}$中的序列$\{x_{\alpha_1 i}^{(1)}\}$收敛于 x_1. 让

$\mathcal{F}_1=\{P\in\mathcal{P}: P\cap\langle x_{\alpha_1 i}^{(1)}\rangle\neq\varnothing\}$.

由于$\cup\mathcal{F}_1$是遗传可分的. 因此, 我们可以得到$S^{(2)}\setminus(\cup\mathcal{F}_1)$中的序列$\{x_{\alpha_2 i}^{(2)}\}$收敛于 x_2. 让

$\mathcal{F}_2=\{P\in\mathcal{P}: P\cap\langle x_{\alpha_2 i}^{(2)}\rangle\neq\varnothing\}$.

那么$\cup(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)$是遗传可分的, 于是可以得到$S^{(3)}\setminus(\cup(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2))$中的序列$\{x_{\alpha_3 i}^{(3)}\}$收敛于$x_3$. 由此, 可以得到 X 中序列的互不相交族$\{\langle x_{\alpha_n i}^{(n)}\rangle: n\in N\}$使得

(6.2.1) 每一序列$\{x_{\alpha_n i}^{(n)}\}_i$收敛于 x_n 且所有的 $x_{\alpha_n i}^{(n)}\neq x_n$.

(6.2.2) $\mathcal{P}$ 的每一元至多与一个序列$\{x_{\alpha_n i}^{(n)}\}_i$相交.

令

$T=[x_n]\cup\{x_{\alpha_n i}^{(n)}: i, n\in N\}$.

由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网，所以 T 同胚于 S_2，从而 X 不是 Fréchet 空间，矛盾. 因此，Y 中的收敛序列是有限的，故 Y 是离散的. ▮

推论 5.2.7　设 X 是 Fréchet 的正则空间，那么 X 具有局部可数 k 网当且仅当 X 具有星可数 k 网且不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

证明. 设空间 X 具有局部可数 k 网，易验证 X 具有星可数 k 网. 由于 S_{ω_1} 不是局部可分空间，所以 X 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 反之，设空间 X 具有星可数 k 网且不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}，由引理 5.2.6 及(6.1), X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和，所以 X 具有局部可数 k 网. ▮

定理 5.2.8(刘川, Tanaka[1996c]; Sakai[1997a])　对于正则空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的闭映象.

(2) X 是具有星可数 k 网的 Fréchet 空间.

(3) X 是具有点可数可分 k 网的 Fréchet 空间.

证明. 由定理 4.2.6 和引理 4.1.3 知(1)$\Rightarrow$(3). 由定理 5.2.2，引理 4.2.5 和定理 4.2.6 的(3)$\Rightarrow$(1)知(2)$\Rightarrow$(1). 下面证明(3)$\Rightarrow$(2).

让 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数的可分 k 网. 由引理 5.2.6, $X=Z\cup Y$，其中 Z 是 X 的开子集且可表示为$\aleph_0$空间族$\{Z_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$的拓扑和，而 $Y=X\setminus Z$ 是 X 的闭离散子空间. 对于每一$\alpha\in\Lambda$，让 D_α 是 Z_α 的可数稠子集，对于每一$\Lambda'\subset\Lambda$，让 $D(\Lambda')=\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}D_\alpha$，则

(8.1) 存在子标集Λ的互不相交族$\{\Lambda_\gamma: \gamma\in\Gamma\}$使得每一$\Lambda_\gamma$是可数的，且对于每一$P\in\mathcal{P}$有$|\{\gamma\in\Gamma: P\cap D(\Lambda_\gamma)\neq\varnothing\}|\le 1$.

考虑在Λ上的两元关系~: 对于α，$\beta\in\Lambda$，$\alpha\sim\beta$当且仅当存在Λ的有限子集$\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$和 $\mathcal{P}$ 的有限子集$\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$使得$\alpha_0=\alpha$，$\alpha_n=\beta$，且对于 $0\le i<n$ 有 $P_i\cap D_{\alpha_i}\neq\varnothing$和 $P_i\cap D_{\alpha_{i+1}}\neq\varnothing$. 则~是$\Lambda$上的等价关系. 对于每一$\alpha\in\Lambda$，因为 D_α 是可数的且 $\mathcal{P}$ 是点可数的，

$\{P\in\mathcal{P}: P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}$是可数的. 此外, 对于每一$P\in\mathcal{P}$, 因为P是可分的且$\{Z_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$是X的两两互不相交的开子集族, 所以$\{\alpha\in\Lambda: P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}$也是可数的. 于是易验证每一等价类是可数集. 让$\{\Lambda_\gamma: \gamma\in\Gamma\}$是这些等价类的族, 则它符合(8.1)的要求.

不妨设X满足下述条件

(8.2) 对于每一$P\in\mathcal{P}$, $|\{\alpha\in\Lambda: P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}|\leq 1$.

对于每一$\alpha\in\Lambda$, 让$\mathcal{P}_\alpha=\{cl_{Z_\alpha}(P\cap Z_\alpha): P\in\mathcal{P}, P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}$. 由引理5.1.14, $\mathcal{P}_\alpha$是Z_α的可数k网. 让$\mathcal{F}=\{\{y\}: y\in Y\}\cup(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha)$. 则$\mathcal{F}$是X的星可数覆盖.

(8.3) $\mathcal{F}$是X的wcs*网.

设X中非平凡的序列$\{x_n\}$收敛于点$x\in U$, 其中U是X的开子集, 若存在$\alpha\in\Lambda$使得$x\in Z_\alpha$, 由于Z_α是X的开子集且$\mathcal{P}_\alpha$是Z_α的k网, 存在$P\in\mathcal{P}_\alpha$使得$P\subset U$且P含有序列$\{x_n\}$的子序列. 于是可以设$x\in Y$. 因为Y是X的闭离散子空间, 不妨设$\langle x_n\rangle\subset Z$. 设$\{\alpha\in\Lambda$: 存在$n\in N$使得$x_n\in Z_\alpha\}$是无限的, 那么可选取$\{x_n\}$的子序列$\{y_n\}$和$\Lambda$中的序列$\{\alpha_n\}$使得每一$y_n\in Z_{\alpha_n}$, 其中当$n\neq m$时有$\alpha_n\neq\alpha_m$. 因为每一$D_{\alpha_n}$是$Z_{\alpha_n}$的序列稠子集, 所以存在$D_{\alpha_n}$中的序列$\{y_{nm}\}$收敛于$y_n$, 于是$x\in cl\{y_{nm}: n, m\in N\}$, 从而可以选取$\{y_{nm}\}$中的序列$\{y_{n_j m_j}\}$收敛于x. 由于$\mathcal{P}$是X的k网, 存在$P\in\mathcal{P}$使得P含有$\{y_{n_j m_j}\}$的子序列, 因此P与无限个$D_{\alpha_n}$相交, 这与(8.2)相矛盾. 这说明$\{\alpha\in\Lambda$: 存在$n\in N$使得$x_n\in Z_\alpha\}$是有限集. 不失一般性, 我们可以设存在$\alpha\in\Lambda$满足$\langle x_n\rangle\subset Z_\alpha$. 让$E=\{x\}\cup Z_\alpha$. 则$D_\alpha$是E的稠子集. 由引理5.1.14, 集族$\{cl_E(P\cap E): P\in\mathcal{P}, P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}$是E的k网, 所以存在$P\in\mathcal{P}$使得$P\cap D_\alpha\neq\varnothing$, $cl_E(P\cap E)\subset U$且$cl_E(P\cap E)$含有无限项x_n, 于是$cl_{Z_\alpha}(P\cap Z_\alpha)\subset U$且$cl_{Z_\alpha}(P\cap Z_\alpha)$含有无限项$x_n$, 故$\mathcal{F}$是X的wcs*网.

由引理2.1.6, X具有星可数k网. ▉

例 5.2.9 (1) 具有星可数k网的k空间$\not\Rightarrow$由k且$\aleph_0$空间族控制.

如例1.5.8中的半圆盘拓扑空间X. X是具有局部可数k网的第一可数空间. 若X由k且$\aleph_0$空

间族控制, 由引理 4.2.5, X 有由$\aleph_0$子空间组成的遗传闭包保持闭覆盖 $\mathscr{F}$. 令

$D=\{x\in X : (\mathscr{F})_x$ 不是有限的$\}$,

$\mathscr{G}=\{cl(F\setminus D) : F\in\mathscr{F}\}\cup\{\{x\} : x\in D\}$.

由引理 4.1.3, D 是 X 的闭离散子空间. 若存在 $y\in X$ 和 $\mathscr{F}$ 的可数子集$\langle F_n\rangle$使得 $y\in\bigcap_{n\in N} cl(F_n\setminus D)$, 设 y 在 X 中的局部基是$\langle V_n\rangle$, 那么存在 X 中两两互不相同的点组成的序列$\{y_n\}$使得每一 $y_n\in V_n\cap(F_n\setminus\{y\})$, 矛盾. 从而, $\mathscr{G}$ 是 X 的点有限且闭包保持的闭子集族, 故 $\mathscr{G}$ 是 X 的局部有限的闭覆盖. 令 $G=\oplus\mathscr{G}$, $g:G\to X$ 是自然映射, 则 g 是有限到一的闭映射. 由推论 2.1.7, G 具有点可数基 $\mathscr{B}$. 让 $\mathscr{H}=g(\mathscr{B})$, 则 $\mathscr{H}$ 是 X 的点可数覆盖. 又由于 g 是序列商映射, $\mathscr{H}$ 是 X 的点可数 cs*网, 矛盾.

(2) 具有点可数的紧 k 网的 k 空间$\not\Rightarrow$具有星可数 k 网; 如例 1.5.4. ▌

问题 5.2.10 设正则空间 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间, 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的, 那么 X 是否具有星可数 k 网?

5.3 乘积空间的 k 空间性质

两个 k 空间的乘积空间未必是 k 空间, Michael[1973]提出下述问题.

问题 5.3.1 设 X 和 Y 是 k 空间, 寻求 $X\times Y$ 是 k 空间的充分且必要条件.

在某些广义度量空间类中, 该问题获得了较满意的解, 尤其是具有确定 k 网的空间所获得的条件更为简明, 为叙述的方便起见, 我们做下述定义.

定义 5.3.2 称空间列$\{X_i\}$满足 Tanaka 条件, 如果$\{X_i\}$满足下述条件之一:

(1) 所有的 X_i 都是第一可数空间.

(2) 所有的 X_i 都是 k 空间, 并且至多有限个 X_i 不是紧空间, 至多一个 X_i 不是局部紧空间.

(3) 所有的 X_i 都是局部 k_ω 空间, 并且至多只有有限个 X_i 不是紧空间.

特殊的情形是两个空间作为一组满足 Tanaka 条件.

由引理 1.4.5, 我们有

引理 5.3.3 若空间列$\{X_i\}$满足 Tanaka 条件, 则$\prod_{i\in N} X_i$ 是 k 空间. ▌

本节主要讨论引理 5.3.3 的逆何时成立. Tanaka[1976]证明了在具有σ局部有限 k 网的正则空

间类中引理 5.3.3 的逆成立. Gruenhage[1980]证明了在 Lašnev 空间空间类中引理 5.3.3 的逆成立等价于集论假设 BF(ω_2)不成立. Lašnev 空间或度量空间的商 s 映象都具有点可数 k 网. 是否可在具有点可数 k 网的空间上获得更一般的结果?

猜测 5.3.4 设 X 和 Y 是具有点可数 k 网的 k 空间, 则 X×Y 是 k 空间当且仅当空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

本节的内容由三部分组成, 一是介绍在 ZFC 中关于猜测 5.3.4 的绝对性结果, 二是介绍在集论假设 BF(ω_2)下关于猜测 5.3.4 的相对性结果, 三是讨论可数积的 k 空间性质.

引理 5.3.5 设 $S_\omega \times Z$ 是 k 空间, 如果 $<Z_n>$ 是 Z 中某点递减的网, 则某一 $cl(Z_n)$ 是可数紧的.

证明. 记 $S_\omega=\{x_0\}\bigcup(\bigcup_{n\in N} T_n)$. 置 $Y=\{x_0\}\bigcup(\bigcup_{n\in N} T_n \times\{n\})$. 集合 Y 赋予下述拓扑: $Y\setminus\{x_0\}$中的点是 Y 的孤立点, x_0 在 Y 中的邻域基元形如$\{x_0\}\bigcup(\bigcup_{n\ge i} T_n\times\{n\})$, $i\in N$. 那么 Y 是具有可数基的正则空间, 于是 Y 是度量空间. 令 $A=\{(x, (x, n))\in S_\omega\times Y : x\in T_n, n\in N\}$, 则 $A\subset S_\omega\times Y$ 且$(x_0, x_0)\in cl(A)\setminus A$, 从而 A 不是 $S_\omega\times Y$ 的闭子集. 另一方面, 我们证明对于 $S_\omega\times Y$ 的任一非空紧子集 K, $K\cap A$ 是 K 的闭子集. 由于 K 是 $S_\omega\times Y$ 的非空紧子集, 分别存在 S_ω 和 Y 的非空紧子集 K_1 与 K_2 使得 $K\subset K_1\times K_2$. 由 S_ω 的定义知对于每一 $n\in N$, 若 $x_n\in T_n$, 则 $<x_n>$ 是 S_ω 的离散子集, 从 K_1 的紧性知存在 $i\in N$ 使得 $K_1\cap(\bigcup_{n\ge i} T_n)=\varnothing$. 记 $B=(K_1\times K_2)\cap A$. 对于任意的 $a\in K_1\times K_2\setminus B$, 我们断言存在 a 在 $S_\omega\times Y$ 中的开邻域 V 使得 $V\cap B=\varnothing$. 事实上, 设 $a=(a_1, a_2)$. 若 $a_2=x_0$, 令 $V_1=S_\omega\times(\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\ge i} T_n\times\{n\}))$, 则 V_1 是 a 在 $S_\omega\times Y$ 中的开邻域, 如果存在 $b=(b_1, b_2)\in V_1\cap B$, 从 $b_1\in K_1$ 知存在 $i_0<i$ 使得 $b_1\in T_{i_0}$, 再从 $b\in A\cap V_1$ 知 $b_2=(b_1, i_0)\in\bigcup_{n\ge i}(T_n\times\{n\})$, 于是 $i_0\ge i$, 矛盾, 所以 $V_1\cap B=\varnothing$; 若 $a_2\neq x_0$ 且 $a_1\neq x_0$, 令 $V_2=\{a\}$, 则 V_2 是 a 在 $S_\omega\times Y$ 中的开邻域, 显然有 $V_2\cap B=\varnothing$; 若 $a_2\neq x_0$ 且 $a_1=x_0$, 设 $a_2=(x_{nm}, n)\in T_n\times\{n\}$, 令 $V_3=(S_\omega\setminus\{x_{nm}\})\times\{a_2\}$, 则 V_3 是 a 在 $S_\omega\times Y$ 中的开邻域, 如果存在 $c=(c_1, c_2)\in V_3\cap B$, 则 $c_2=a_2$, 从 $c\in A\cap V_3$ 知 $c_1=x_{nm}\in S_\omega\setminus\{x_{nm}\}$, 矛盾, 所以 $V_3\cap B=\varnothing$. 因此, B 是 $K_1\times K_2$ 的闭子集. 从而 $K\cap A$ 是 K 的闭子集. 这说明 $S_\omega\times Y$ 不是 k 空

间.

现在, 设<Z_n>是空间 Z 中某点 z_0 递减的网, 若每一 cl(Z_n)均不是 Z 的可数紧的子空间, 那么存在{n}的子序列{n_k}及 Z 的无限可数闭离散子空间列{C_k}使得每一 $C_k \subset$ cl(Z_{n_k})╲{z_0}且{C_k}中的元是两两互不相交的. 令 Z_0={z_0}$\bigcup$($\bigcup_{k\in N} C_k$), 则 Z_0 是 Z 的闭子空间且同胚于上面构造的空间 Y, 于是 $S_\omega \times$Z 不是 k 空间, 矛盾. 故某一 cl(Z_n)是可数紧的. ▉

引理 5.3.6 设 X 是具有可数 k 网的 k 空间. 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部紧的, 则 X 是 k_ω 空间.

证明. 由引理 4.2.4, X 具有可数 k 网<P_i>使得每一 cl(P_i)是 X 的紧子集. 因为 X 是 k 空间, 所以 X 关于可数族{$\bigcup_{i\le n}$ cl(P_i) : n$\in$ N}具有弱拓扑, 故 X 是 k_ω 空间. ▉

为了简化 Tanaka 条件, 我们引入下述的 Shibakov 条件. 称空间 X 满足 Shibakov 条件, 若 X $\times S_\omega$ 是 k 空间, 则 X 是局部$\aleph_0$空间. 该条件是 Shibakov[1995a]在讨论乘积空间的 k 空间性质时特别研究的条件, 其作用可从下述引理中得到体现.

引理 5.3.7 设 X, Y 都是具有点可数 k 网的正则空间. 若 X×Y 是 k 空间且 X, Y 都满足 Shibakov 条件, 则空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

证明. 由推论 2.1.4, 空间 X 和 Y 都是序列空间. 先设空间 X 和 Y 中至少有一空间不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω. 如果 X 含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_ω, Y 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 则由推论 2.1.11, Y 是第一可数空间且 $S_2\times$Y 或 $S_\omega\times$Y 是 k 空间. 由于 S_ω 是 S_2 的完备映象, 再由引理 1.4.4, $S_\omega\times$Y 是 $S_2\times$Y 的完备映象, 而 k 空间性质是完备映射不变性质和完备映射逆不变性质, 所以 $S_\omega\times$Y 是 k 空间. 由引理 5.3.5, Y 是局部紧空间. 如果 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, Y 含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_ω, 则由上述同样的理由知 X 是局部紧空间. 如果 X 和 Y 都不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 则由推论 2.1.11 知 X 和 Y 都是第一可数空间. 所以空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

现在, 设空间 X 和 Y 都含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_ω, 于是 X$\times S_\omega$ 和 Y$\times S_\omega$ 都是 k 空间. 由 Shibakov 条件, X 和 Y 都是局部$\aleph_0$空间, 由引理 5.3.5, X 和 Y 的每一第一可数的闭子空间是局部

紧的, 再由引理 5.3.6, X 和 Y 都是局部 k_ω 空间, 所以空间对(X, Y)也满足 Tanaka 条件. ∎

定理 5.3.8(刘川, 林寿[1997]) 设 $X\times Y$ 是正则的 k 空间. 若空间 X, Y 满足下述条件之一, 则空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

(1) 具有点可数 cs 网的序列空间.

(2) 具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间.

(3) 具有紧可数 cs*网的空间.

证明. 由引理 2.1.6 和引理 5.3.7, 为证明空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件, 只须证明满足定理条件的空间满足 Shibakov 条件. 即, 若 $X\times S_\omega$ 是正则的 k 空间且 X 满足条件(1)~(3)之一, 则 X 是局部 $\aleph_0$ 空间.

(1) 设 X 是具有点可数 cs 网的序列空间. 由推论 2.4.4, 存在度量空间 M 和序列覆盖的商 s 映射 $f: M\to X$. 让 $\mathcal{B}$ 是 M 的 σ 局部有限基. 对于每一 $x\in X$ 和 $z\in f^{-1}(x)$, 存在 $\mathcal{B}$ 的子集 $\langle B_n\rangle$ 是 z 在 M 中递减的局部基, 由引理 5.3.5 和推论 2.1.13, 某一 $cl(B_n)$ 是 X 的紧可度量子空间, 于是 B_n 是 X 的可分度量子空间. 从而 $\{P\in f(\mathcal{B}): P$ 是 X 的可分度量子空间$\}$ 构成了 X 的点可数 cs 网. 再由定理 5.1.9, X 是局部 $\aleph_0$ 空间.

(2) 设 X 是具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间. 由引理 2.1.10 及(1)所证知 X 是具有点可数的可分 cs*网的 Fréchet 空间, 由定理 5.1.16, X 具有局部可数 k 网, 故 X 是局部 $\aleph_0$ 空间.

(3) 设 X 是具有紧可数 cs*网的空间. 由于 $X\times S_\omega$ 是 k 空间, 由引理 5.3.5 和推论 2.1.13, X 的每一第一可数的闭子空间是局部紧的. 由引理 4.2.4, X 具有紧可数的 cs*网 $\mathcal{P}$ 使得 $\mathcal{P}$ 的每一元的闭包是 X 的紧子集, 从而 $\mathcal{P}$ 是 X 的星可数 cs*网, 由推论 5.1.12, X 是局部 $\aleph_0$ 空间. ∎

推论 5.3.9 空间 $(S_2)^\omega$ 和 $(S_\omega)^\omega$ 都不是 k 空间.

证明. 由于 S_ω 是 S_2 的完备映象, 所以 $(S_\omega)^\omega$ 是 $(S_2)^\omega$ 的完备映象, 于是 $(S_\omega)^\omega$ 是 k 空间当且仅当 $(S_2)^\omega$ 是 k 空间. 若 $(S_\omega)^\omega$ 是 k 空间, 则 $S_\omega\times(S_\omega)^\omega$ 是 k 空间, 而 $(S_\omega)^\omega$ 具有可数 cs*网, 由定理 5.3.8, $(S_\omega)^\omega$ 是局部 k_ω 空间, 这与引理 1.4.5 相矛盾. 故 $(S_\omega)^\omega$ 不是 k 空间. ∎

推论 5.3.10(刘川, Tanaka[1998b]) 设 X^2 是正则的 k 空间, 若 X 满足下述条件之一, 则 X 满

足 Tanaka 条件, 即 X 是第一可数空间或局部 k_ω 空间.

(1) 具有点可数 k 网的 Fréchet 空间.

(2) 具有紧可数 k 网的 k 空间.

证明. 若空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 由推论 2.1.11, X 是第一可数空间. 若 X 含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 则 $S_\omega \times X$ 是 k 空间. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的满足(1)或(2)的关于有限交封闭的 k 网, 由引理 5.3.5, 推论 2.1.13 和引理 4.2.4, 不妨设 $\mathcal{P}$ 的每一元是闭包是 X 的紧可度量子集.

(1) 设 $\mathcal{P}$ 是点可数的, 则 X 是具有点可数的可分 k 网的 Fréchet 空间, 由定理 5.2.8 知 X 具有星可数 k 网. 由例 1.5.2, $(S_{\omega_1})^2$ 不是 k 空间, 于是 X 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 再由推论 5.2.7, 定理 5.1.16 和定理 5.3.8, X 是局部 k_ω 空间.

(2) 设 $\mathcal{P}$ 是紧可数的, 于是 $\mathcal{P}$ 是星可数的. 由引理 4.3.4, 设$\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$和$\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$分别是 $\mathcal{P}$ 和 X 的星可数分解. 令 $\mathcal{F}=\{cl(P) : P \in \mathcal{P}\}$, 则 $\mathcal{F}$ 是 X 的紧 k 网. 对于每一 $P \in \mathcal{P}$, 若存在 $\mathcal{P}$ 的不可数子族$\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$使得每一 $cl(P) \cap cl(P_\alpha) \neq \varnothing$, 由于$\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$是紧有限的. 不妨设每一 $P_\alpha \in \mathcal{P}_\alpha$. 对于每一$\alpha < \omega_1$, 由于 $cl(P_\alpha)$是可度量的, 存在 P_α 中的序列 T_α 收敛于 cl(P)中的某点, 不妨设 $cl(P) \cap T_\alpha = \varnothing$. 令 $F=cl(P) \cup (\bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha)$. 由于 X 是 k 空间, 且$\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$是紧有限的, 所以 F 是 X 的闭子集. 定义;$f: F \to F/cl(P)$是自然商映射, 那么 f 是完备映射且 F/cl(P)同胚于 S_{ω_1}, 从而 F^2 是$(S_{\omega_1})^2$ 的完备逆映象. 由例 1.5.2, $(S_{\omega_1})^2$ 不是 k 空间, 于是 F^2 不是 k 空间, 矛盾. 故 $\mathcal{F}$ 是 X 的星可数的紧 k 网. 因此, $\mathcal{F}$ 是 X 的紧可数 cs*网. 由定理 5.3.8, X 是局部 k_ω 空间. ∎

推论 5.3.11(刘川, Tanaka[1998b]) (1) 设 X 是具有紧可数 k 网的正则空间. 若 $X \times S_{\omega_1}$ 是 k 空间, 那么 X 是局部 k_ω 空间.

(2) $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间当且仅当若 X 是具有点可数 k 网的正则空间, 则 $X \times S_{\omega_1}$ 是 k 空间的充分且必要条件是 X 是局部紧空间.

证明. (1) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的紧可数 k 网. 令 $\mathcal{F}=\{cl(P) : P \in \mathcal{P}$ 且 cl(P)是 X 的

紧可度量子空间}. 由于 $X\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间, 所以 $X\times S_{\omega}$ 是 k 空间. 又由于$(S_{\omega_1})^2$不是 k 空间, 于是 X 不含有闭子空间 F 使得 S_{ω_1} 是 F 的完备映象. 由推论 5.3.10(2)所证, $\mathscr{F}$ 是 X 的星可数的紧 k 网, 故 X 是局部 k_{ω} 空间.

(2) 充分性是显然的. 下面证明必要性. 设 $S_{\omega}\times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间. 由引理 1.4.5, 若 X 是局部紧空间, 则 $X\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间. 若 X 是具有点可数 k 网的正则空间且 $X\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间, 于是 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_{ω}. 由推论 2.1.11, X 具有点可数基. 因为 $X\times S_{\omega}$ 也是 k 空间, 由引理 5.3.5, X 是局部紧空间. ▊

空间 $S_{\omega}\times S_{\omega_1}$ 是否是 k 空间等价于集论假设 BF(ω_2). 本节第二部分介绍附加集论假设 BF(ω_2)的一些结果. 让 ${}^{\omega}\omega$ 是从 ω 到 ω 内的所有函数组成的集合. 对于 f, g$\in{}^{\omega}\omega$, 定义 f≤g 当且仅当集$\{n\in\omega : f(n)>g(n)\}$是有限的. BF($\omega_2$)是下述断言: 对于 $F\subset{}^{\omega}\omega$, 如果$|F|<\omega_2$, 则存在 $g\in{}^{\omega}\omega$ 使得对于所有的 $f\in F$ 有 $f\le g$. 由集论拓扑的知识(Kunen[1980]), 有下述事实.

(1) (CH)$\Rightarrow\neg$ BF(ω_2).

(2) (MA+$\neg$ CH)$\Rightarrow$ BF(ω_2).

引理 5.3.12(Gruenhage[1980]) BF(ω_2)成立当且仅当 $S_{\omega}\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间.

证明. 记空间 $X=S_{\omega}\times S_{\omega_1}$, 而

$S_{\omega}=\{s_0\}\cup\{s_{nm} : n, m\in\omega\}$, 其中对于每一 $n\in\omega$, 序列$\{s_{nm}\}_m$收敛于 s_0.

$S_{\omega_1}=\{t_0\}\cup\{t_{\alpha m} : \alpha<\omega_1, m\in\omega\}$, 其中对于每一$\alpha<\omega_1$, 序列$\{t_{\alpha m}\}_m$收敛于 t_0.

对于每一 $f\in{}^{\omega}\omega$ 和 $g\in{}^{\omega_1}\omega$, 定义

$U_f=\{s_0\}\cup\{s_{nm} : m\ge f(n)\}, V_g=\{t_0\}\cup\{t_{\alpha m} : m\ge g(\alpha)\}$.

设 BF(ω_2)不成立, 则存在 ${}^{\omega}\omega$ 的子族$\{f_{\alpha}\in{}^{\omega}\omega : \alpha<\omega_1\}$使得如果 $g\in{}^{\omega}\omega$, 则有$\alpha<\omega_1$ 满足对无限个 $n\in\omega$ 有 $f_{\alpha}(n)>g(n)$. 对于每一$\alpha<\omega_1$, 让 $G_{\alpha}=\{(s_{nm}, t_{\alpha m}) : m\le f_{\alpha}(n)\}$, 则 G_{α} 是 X 的闭子集. 令 $G=\bigcup_{\alpha<\omega_1}G_{\alpha}$. 设 K 是 X 的紧子集, 则 K 仅与有限个 G_{α} 相交, 于是 $K\cap G$ 是 X

的闭子集. 设 U 是 X 中含有点(s_0, t_0)的开子集, 那么存在 $f\in {}^{\omega}\omega$ 和 $g\in {}^{\omega_1}\omega$ 使得 $U_f \times V_g \subset U$, 从而存在$\alpha < \omega_1$使得对于无限个 $n\in\omega$ 有 $f_\alpha(n)>f(n)$, 所以存在 $j\in\omega$ 使得 $g(\alpha)\le j$, $f_\alpha(j)\ge f(j)$, 所以$(s_{jf_\alpha(j)}, t_{\alpha j})\in G_\alpha \cap U$, 因此$(s_0, t_0)\in cl(G)\setminus G$, 故 G 不是 X 的闭子集. 这说明 X 不是 k 空间.

反之, 设 BF(ω_2)成立. 若 X 中存在非闭的序列闭集 H. 由于 S_ω, S_{ω_1} 都是序列空间, 所以对于每一 $s\in S_\omega$ 和 $t\in S_{\omega_1}$, $(\{s\}\times S_{\omega_1})\cap H$ 和$(S_\omega\times\{t\})\cap H$ 都是 X 的闭子集, 于是 $cl(H)=H\cup\{(s_0, t_0)\}$, 故不妨设 H 仅含有 X 中的孤立点.

对于每一$\alpha<\omega_1$, 因为 $S_\omega\times(\{t_0\}\cup\{t_{\alpha m} : m\in\omega\})$是序列空间, 存在 $f_\alpha\in {}^{\omega}\omega$ 和 $n_\alpha\in\omega$ 使得 $U_{f_\alpha}\times(\{t_{\alpha m} : m\ge n_\alpha\})\cap H=\varnothing$. 由于 BF($\omega_2$), 存在 $f\in {}^{\omega}\omega$ 使得对于所有的$\alpha<\omega_1$ 有 $f_\alpha \le f$, 于是存在 $i_\alpha\in\omega$ 使得当 $i\ge i_\alpha$ 时有 $f_\alpha(i)\le f(i)$. 对于每一$\alpha<\omega_1$, 存在$n'_\alpha\ge n_\alpha$ 使得$\{(s_{im}, t_{\alpha j}) : i<i_\alpha, m\in\omega, j\ge n'_\alpha\}\cap H=\varnothing$. 定义 $g\in {}^{\omega_1}\omega$ 使得 $g(\alpha)=n'_\alpha$. 设$(s_{im}, t_{\alpha j})\in U_f\times V_g$. 如果 $i<i_\alpha$, 由于 $j\ge n'_\alpha$, 于是$(s_{im}, t_{\alpha j})\notin H$. 如果 $i\ge i_\alpha$, 那么 $f_\alpha(i)\le f(i)\le m$ 且 $j\ge n_\alpha$, 于是$(s_{im}, t_{\alpha j})\notin H$, 所以$(U_f\times V_g)\cap H=\varnothing$, 矛盾. 因此, X 是序列空间. ∎

引理 5.3.13(刘川, 林寿[1997]) 设 $S_\omega\times X$ 是正则的 k 空间, 则下述条件相互等价:

(1) $S_\omega\times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间.

(2) 若 X 有点可数 k 网 $\mathcal{P}$, 则对于每一 $x\in X$, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集 $\mathcal{P}_x$ 使得 $x\in int(\cup\mathcal{P}_x)$.

(3) 若 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间, 则 X 是局部 k_ω 空间.

(4) 若 X 有紧可数 k 网, 则 X 是局部 k_ω 空间.

证明. 记 $S_\omega=\{s_0\}\cup\{s_{nm} : n, m\in\omega\}$, 其中对于每一 $n\in\omega$, 序列$\{s_{nm}\}_m$ 收敛于 s_0. 因为 $S_\omega\times X$ 是 k 空间, 由引理 5.3.5, X 的每一第一可数的闭子空间是局部可数紧的.

(1)$\Rightarrow$(2). 设 $S_\omega\times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间. 由引理 5.3.12, BF(ω_2)不成立. 让 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 k 网, 那么

(13.1) 对于每一 $A\subset X$, $cl(A)=\cup\{cl(D) : D$ 是 A 的可数子集$\}$

让 B=$\cup$\{cl(D) : D 是 A 的可数子集\}, 则 B$\subset$cl(A)$\subset$cl(B). 设 X 中的序列\{b_n\}收敛于 b, 若 $<b_n>\subset$B, 则存在 A 的可数子集 D 使得 cl$<b_n>\subset$cl(D)$\subset$B, 于是 b$\in$B, 所以 B 是 X 的序列闭集. 由推论 2.1.4, X 是序列空间, 从而 B 是 X 的闭子集, 因此 cl(A)=B.

若(2)不成立, 则存在 x$\in$X 使得对于$\mathcal{P}$的任一可数子族$\mathcal{P}_x$有 $x\notin$int($\cup\mathcal{P}_x$). 由于 x$\in$cl(X$\setminus$\{x\})及(13.1), 存在 X$\setminus$\{x\}的可数子集 D_0 使得 x$\in$cl(D_0). 让 $\mathcal{P}_0$=\{P$\in\mathcal{P}$: P$\cap$($D_0\cup$\{x\})$\neq\emptyset$\}, 则 $\mathcal{P}_0$是可数的. 于是 x$\in$cl(X$\setminus$($\cup\mathcal{P}_0$)), 存在 X$\setminus$($\cup\mathcal{P}_0$)的可数子集 D_1 使得 x$\in$cl(D_1). 让 $\mathcal{P}_1$=\{P$\in\mathcal{P}$: P$\cap D_1\neq\emptyset$\}, 则$\mathcal{P}_1$是可数的, 从而 x$\in$cl(X$\setminus$($\cup$($\mathcal{P}_0\cup\mathcal{P}_1$))). 由超限归纳法, 可选取 X 的子集族\{D_α : $\alpha<\omega_1$\}使得

(13.2) 对于每一$\alpha<\omega_1$, x$\in$cl(D_α), x$\notin D_\alpha$ 且 D_α 是可数的.

(13.3) 对于每一 P$\in\mathcal{P}$, P 至多与一个 D_α 相交.

由于 BF(ω_2)不成立, 存在 $^\omega\omega$ 的子族\{$f_\alpha\in{}^\omega\omega$: $\alpha<\omega_1$\}使得如果 g$\in{}^\omega\omega$, 则有$\alpha<\omega_1$满足对无限个 n$\in\omega$ 有 f_α(n)>g(n). 置 H_α=\{(s_{nm}, $d_{\alpha i}$) : m$\le f_\alpha$(n)且 i$\le$n\}, 其中 $d_{\alpha i}$表示 D_α 中的第 i 项. 让 H=$\bigcup_{\alpha<\omega_1}H_\alpha$, 则 H$\subset S_\omega\times$X. 如果 K 是 $S_\omega\times$X 的紧子集, 那么存在 n$\in$N 和$\mathcal{P}$的有限子集$\mathcal{F}$使得 K$\subset L_n\times$($\cup\mathcal{F}$), 其中 L_n=\{s_0\}$\cup$\{s_{im} : i$\le$n 且 m$\in\omega$\}. 由(13.3), ($L_n\times$($\cup\mathcal{F}$))$\cap$H 是有限的, 于是 K$\cap$H 是有限的, 因为 $S_\omega\times$X 是 k 空间, 所以 H 在 $S_\omega\times$X 中是闭的. 现在, 设 U 是 $S_\omega\times$X 中含有点(s_0, x)的开子集, 那么存在 s_0 在 S_ω 中的邻域 U_g 和 x 在 X 中的邻域 U_x 使得 $U_g\times U_x\subset$U, 其中对于某个 g$\in{}^\omega\omega$ 有 U_g=\{s_0\}$\cup$\{s_{nm} : m$\ge$g(n)\}, 于是存在$\alpha<\omega_1$使得对于无限个 n$\in\omega$ 有 f_α(n)>g(n). 取 $d_{\alpha i}\in U_x\cap D_\alpha$, 并且选取 j>i 满足 f_α(j)>g(j), 那么($s_{jf_\alpha(j)}$, $d_{\alpha i}$)$\in$($U_g\times U_x$)$\cap$H$\subset$U$\cap$H, 于是(s_0, x)$\in$cl(H)$\setminus$H, 从而 H 不是 $S_\omega\times$X 的闭子集, 矛盾.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 X 是具有点可数 k 网$\mathcal{P}$的 Fréchet 空间. 由推论 2.1.13 和引理 4.2.4, 不妨设$\mathcal{P}$的每一元的闭包是 X 的紧可度量子空间. 由(2), 对于每一 x$\in$X, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子族 $\mathcal{P}_x$ 使得 x$\in$int($\cup\mathcal{P}_x$). 让 V 是 X 的开子集使得 x$\in$V$\subset$cl(V)$\subset$int($\cup\mathcal{P}_x$), 由引理 5.1.14, cl(V)有可数的

紧 k 网, 故 cl(V)是 k_ω 空间. 因此, X 是局部 k_ω 空间.

(2)$\Rightarrow$(4). 设 X 具有紧可数 k 网 $\mathcal{P}$. 由推论 2.1.13 和引理 4.2.4, 不妨设 $\mathcal{P}$ 的每一元的闭包是 X 的紧度量子空间. 由(2), $\mathcal{P}$ 是局部可数的, 于是 X 具有局部可数的紧 k 网. 从而, X 是局部 k_ω 空间.

(3)或(4)$\Rightarrow$(1). 因为 S_{ω_1} 不是局部 k_ω 空间, 所以若(3)或(4)成立, 那么 $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间. ▌

定理 5.3.14(林寿[1998b]; 刘川, 林寿[1997]; 刘川, Tanaka[1996c]) 下述条件相互等价:

(1) $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间.

(2) 若 X, Y 都是具有点可数 k 网的正则的 Fréchet 空间或具有紧可数 k 网的正则空间, 则 X×Y 是 k 空间当且仅当空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

证明. 由引理 5.3.3, 引理 5.3.13 和引理 5.3.7 知(1)$\Rightarrow$(2). 设 $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 是 k 空间. 显然, S_ω 和 S_{ω_1} 都是具有紧可数 k 网的 Fréchet 空间, 但是空间对(S_ω, S_{ω_1})不满足 Tanaka 条件. 故(2)$\Rightarrow$(1). ▌

推论 5.3.15 $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间当且仅当若 X 和 Y 是具有星可数 k 网的正则空间, 则 X×Y 是 k 空间的充要条件是空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

证明. 只须注意到下述两点, (1) 若空间 X 具有星可数 k 网, 则 X 具有紧可数 k 网; (2) S_ω 和 S_{ω_1} 都是具有星可数 k 网的 k 空间. ▌

问题 5.3.16(刘川, Tanaka[1998b]) 具有点可数 k 网的正则的 Fréchet 空间是否具有紧可数 k 网?

本节最后一部分讨论可数积的 k 空间性质.

引理 5.3.17 设空间列{X_i}具有点可数 k 网. 若 $\prod_{i\in N} X_i$ 是 k 空间, 则存在 n∈N 使得 $\prod_{i\geq n} X_i$ 是第一可数空间.

证明. 由推论 5.3.9, 存在 n∈N 使得当 i≥n 时空间 X_i 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 再由推论 2.1.11 知 X_i 是第一可数空间, 从而 $\prod_{i\geq n} X_i$ 是第一可数空间. ▌

推论 5.3.18 设空间 X 具有点可数 k 网，则 X^{ω} 是 k 空间当且仅当 X 是第一可数空间. ▌

定理 5.3.19 设 $\prod_{i\in N} X_i$ 是正则的 k 空间. 若每一空间 X_i 满足下述条件之一，则空间列 $\{X_i\}$ 满足 Tanaka 条件.

(1) 具有点可数 cs 网的序列空间.

(2) 具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间.

(3) 具有紧可数 cs*网的空间.

证明. 由于每一空间 X_i 具有条件(1)~(3)之一，于是 X_i 具有点可数 k 网. 由于 $X_1\times\prod_{i\geq 2} X_i$ 是 k 空间.

(19.1) 如果 X_1 和 $\prod_{i\geq 2} X_i$ 都是强 Fréchet 空间，则所有的 X_i 都是强 Fréchet 空间，由推论 2.1.7，所有的 X_i 都是第一可数空间.

(19.2) 如果 X_1 和 $\prod_{i\geq 2} X_i$ 中恰有一个空间是强 Fréchet 空间，若 X_1 不是强 Fréchet 空间，那么 $\prod_{i\geq 2} X_i$ 是强 Fréchet 空间，于是 $\prod_{i\geq 2} X_i$ 是第一可数空间且由推论 2.1.11 知 X_1 含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_{ω}，因此，$S_{\omega}\times\prod_{i\geq 2} X_i$ 是 k 空间. 由引理 5.3.5 和推论 2.1.13 知 $\prod_{i\geq 2} X_i$ 是局部紧空间，从而，对于 $i\geq 2$，所有的 X_i 是局部紧空间且至多有限个 X_i 不是紧空间. 若 $\prod_{i\geq 2} X_i$ 不是强 Fréchet 空间，那么 X_1 是局部紧空间.

(19.3) 如果 X_1 和 $\prod_{i\geq 2} X_i$ 都不是强 Fréchet 空间，则 $S_{\omega}\times X_1$ 和 $S_{\omega}\times\prod_{i\geq 2} X_i$ 都是 k 空间. 由定理 5.3.8 知 X_1 和 $\prod_{i\geq 2} X_i$ 都是局部 k_{ω} 空间，于是所有的 X_i 都是局部 k_{ω} 空间且至多有限个 X_i 不是紧空间.

综上所述，或者 $\{X_i\}$ 满足 Tanaka 条件，或者 X_1 是局部紧空间且 $\prod_{i\geq 2} X_i$ 是 k 空间. 利用归纳法，可以验证，或者 $\{X_i\}$ 满足 Tanaka 条件，或者所有的 X_i 是局部紧空间，而具有点可数 k 网的局部紧空间是第一可数空间，于是总有 $\{X_i\}$ 满足 Tanaka 条件. ▌

例 5.3.20(林寿，刘川[1996]) (BF(ω_2))存在具有点可数闭 k 网的正则空间 Y 使得 $Y\times S_{\omega}$ 是 k 空间，但是 Y 不是局部 σ 紧空间.

让 B 是 I 的基数为 ω_1 的子集. 对于每一 $b\in B$, 让 B_b 是以 x_b 为极限点的同胚于 S_1 的收敛序列. 让 Y 是空间$(\oplus\{B_b : b\in B\})\oplus I$ 中将每一 x_b 与 $b\in B$ 贴成一点而成的商空间. Y/I 同胚于 S_{ω_1}. 由引理 5.3.12, $S_\omega\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间, 而商映射 $p:Y\to Y/I$ 是完备映射, 所以 $Y\times S_\omega$ 是 k 空间. 显然, Y 不是局部σ 紧空间. ■

例 5.3.21(Shibakov[1995a]) (CH)存在具有点可数闭 k 网的σ 紧的正则空间 Γ_B 使得 $\Gamma_B\times S_\omega$ 是 k 空间, 但是 Γ_B 不是局部 k_ω 空间.

让 $\Gamma=\bigcup_{i\in N}I_i$, 其中 I_i=I. 让 $\pi:\Gamma\to I_0$ 是投影映射, $B\subset I_0$=I. Γ_B 表示集 Γ 赋予极大拓扑使得每一子空间 $I_i\subset\Gamma_B$ 有通常的欧氏拓扑且对于每一 $b\in B$, $\pi^{-1}(b)$是可数紧的具有唯一的非孤立点 $b\in I_0$. ■

5.4 某些尚未解决的问题

为方便读者, 我们将以上各章节提到的一些问题或猜测重新集中成一节, 供有兴趣的读者研究. 为方便查对, 问题或猜测仍使用原来的序号.

问题 2.1.8(林寿, 燕鹏飞[1998]) 设 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 的正则空间, 若 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 那么 X 是否具有点可数的 cs*网?

问题 2.1.17 (1)(刘川, Tanaka[1996b]) 设 X 是具有点可数 cs*网的序列空间, 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2, 那么 X 是否具有点可数的 cs 网?

(2) 用度量空间的适当的映象刻画具有点可数 wcs*网的空间.

猜测 2.2.7 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖的闭映射. 若空间 X 具有点可数 k 网, 那么空间 Y 具有点可数 k 网当且仅当 Y 的每一紧子集是可度量的.

问题 2.2.12(Sakai[1997b]) 是否任一空间可表为具有点可数 k 网空间的闭映象?

问题 2.3.18 设空间 X 具有点可数弱基, 是否存在度量空间 M 和商 s 映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le 1$?

问题 2.4.16(Tanaka[1993]) 开映射是否保持 gf 可数空间?

问题 2.5.12 (1) 具有紧可数 cs*网的序列空间是否具有点可数的 cfp 网?

(2) 是否存在具有点可数 cs*网的正则空间 X 使得 X 不具有点可数的 cfp 网?

问题 3.1.14 具有 cs*覆盖点星网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖的π映象?

问题 3.1.15(Tanaka[1987a]) 设 X 是对称度量空间. 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2, 那么 X 是否是半度量空间?

问题 3.2.7(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 寻求局部可分度量空间的商紧映象的好的内在刻画.

问题 3.2.11(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 具有σ点有限 cs 网的对称度量空间是否是度量空间的商紧映象?

问题 3.2.12 可分度量空间的商π映象是否是可分度量空间的商紧映象?

问题 3.3.2(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs*网的序列空间.

问题 3.3.19(Tanaka, 周浩旋[1985/86]) (局部紧)度量空间的商紧映象是否具有点 G_δ 性质?

问题 3.3.20 (1) 度量空间的伪序列覆盖的 s, π映象是否具有点正则 cs*网?

(2) 具有点正则 cs*网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖紧映象?

问题 3.4.3 度量空间上的序列覆盖的π映射是否是 1 序列覆盖映射?

问题 3.4.5 序列覆盖的闭映射是否保持 g 可度量空间?

问题 3.4.8 设 X 是度量空间, $f:X\to Y$ 是序列商的紧映射, 那么 f 是否是伪序列覆盖映射?

问题 4.1.10 具有σ紧有限弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间?

问题 4.1.11 (1) 具有σ局部有限 k 网的正则的 k 空间是否具有σ闭包保持弱基?

(2) 具有σ闭包保持弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间?

问题 4.3.8 设 $f:Z\to X$ 是闭映射, Z 是度量空间. 刻画分别满足定理 4.3.5 的条件(a)或(b)的空间 X.

问题 5.1.1(Velichko[1988]) 寻求拓扑性质Φ使得空间 X 是具有性质Φ的度量空间的商 s 映象当且仅当 X 既是Φ空间又是度量空间的商 s 映象.

猜想 5.1.3(林寿, 刘川, 戴牧民[1997]) 空间 X 是局部可分度量空间的商 s 映象当且仅当 X 是度量空间的商 s 映象且 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的.

问题 5.1.19 局部可分度量空间的序列覆盖的紧映象是否等价于具有由$\aleph_0$子空间组成的点正则 cs 网的空间?

问题 5.1.20 设正则空间 X 是具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间. 若 X 的每一第一可数的闭

子空间是局部可分的, 那么 X 是否是局部可分空间?

问题 5.2.10 设正则空间 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间, 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的, 那么 X 是否具有星可数 k 网?

问题 5.3.1(Michael[1973]) 设 X 和 Y 是 k 空间, 寻求 X×Y 是 k 空间的充分且必要条件.

猜测 5.3.4 设 X 和 Y 是具有点可数 k 网的 k 空间, 则 X×Y 是 k 空间当且仅当空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

问题 5.3.16(刘川, Tanaka[1998b]) 具有点可数 k 网的正则的 Fréchet 空间是否具有紧可数 k 网?